Physicité

L'oscillateur harmonique (corrections)

Ces corrections sont très longues, il y a donc très probablement des erreurs. Si vous en repérez, ou bien si vous ne comprenez simplement pas quelque chose, venez poser la question sur le discord, si c'est une erreur je la rectifierai, et sinon quelqu'un vous expliquera gentiment, et j'adapterai la correction pour que ça soit plus clair. En résumé, si vous ne comprenez pas quelque chose, c'est de ma faute, pas de la vôtre.

1 Développements limités

Exercice 1 : Développements limités à l'ordre 1

1.

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \ll 1}{=} 1-x$$

2. $z = a + \varepsilon$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\varepsilon} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^{-1} \underset{\varepsilon \ll a}{=} \frac{1}{a}\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)$$

3. $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$

$$\cos(\theta_{eq}+\varepsilon) \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \cos(\theta_{eq}) + \cos'(\theta_{eq})\varepsilon = \cos(\theta_{eq}) - \sin(\theta_{eq})\varepsilon$$

4. $x = 1 + \varepsilon$

$$e^{x^2} = e^{(1+\varepsilon)^2} \underset{\varepsilon \ll 1}{=} e^{1+2\varepsilon} = e \times e^{2\varepsilon} \underset{\varepsilon \ll 1}{=} e \times (1+2\varepsilon)$$

5. $u = u_0 + \varepsilon$

$$e^{u_0+\varepsilon} = e^{u_0}e^{\varepsilon} \underset{\varepsilon \ll 1}{=} e^{u_0}(1+\varepsilon)$$

6.

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = (1+x)^{-3/2} \underset{x \ll 1}{=} \left(1-\frac{3x}{2}\right)$$

7. $z = a + \varepsilon$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{1}{(a+\varepsilon)^4} = \frac{1}{a^4}\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^{-4} \underset{\varepsilon \ll a}{=} \frac{1}{a^4}\left(1-\frac{4\varepsilon}{a}\right)$$

8.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x \ll 1}{=} 1-\frac{x}{2}$$

9. $x = 2 + \varepsilon$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+2+\varepsilon} = \sqrt{3}\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/2} \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \sqrt{3}\left(1+\frac{\varepsilon}{6}\right)$$

Exercice 2 : Solution approchée

On peut donc supposer que $x \ll 1$. Si on fait le DL à l'ordre 1, $\cos(x) \underset{x \ll 1}{=} 1$, $\frac{1}{1-x^2} \underset{x \ll 1}{=} 1$, et on obtient $x = k = 0.1$.

Si on va à l'ordre 2, on obtient :

$$k\frac{1-\frac{x^2}{2}}{1-x^2}=x$$

$$k-\frac{kx}{2}=x(1-x^2)=x-x^3$$

On néglige le terme d'ordre 3 car il est négligeable devant les termes d'ordre 2.

$$\frac{kx^2}{2}+x-k=0$$

C'est une équation quadratique, que l'on sait résoudre :

$$x=\frac{1}{k}(-1\pm\sqrt{1+2k^2})$$

On choisit la solution en $+$ car c'est la seule qui soit proche de 0.

$$x=-1+\sqrt{1+2k^2}=0.99$$

Il n'y a pas grand intérêt à aller à l'ordre 2. Numériquement, on trouve $x=0.97$.

Exercice 3 : Pression dans une salle

1. $h=3\mathrm{m}$, $T=300\mathrm{K}$.

2. $PV=nRT$, donc $[RT]=(F.L^{-2})L^3.N^{-1}=F.L.N^{-1}$, avec F l'homogénéité d'une force. Et $[mg]=F$. Donc :

$$\left[\frac{RT}{Mg}\right]=\frac{F.L.N^{-1}}{F.N^{-1}}=L$$

$H=8.6\mathrm{km}$.

$$P(z)-P_0=P_0\left(e^{-\frac{z}{H}}-1\right)\underset{z\ll H}{=}-P_0\frac{z}{H}$$

3.

$$\frac{|P(z)-P_0|}{P_0}=\frac{z}{H}=3.5\times10^{-4}=0.03\%$$

C'est donc une très bonne approximation.

Exercice 4 : Champ de gravité terrestre

cf. cours page 8.

Exercice 5 : Point de Lagrange

1. On a la relation :

$$0=-\frac{GM_S}{d^2}+\frac{GM_T}{(D-d)^2}+\Omega^2 d$$

On réinjecte $\Omega^2=\frac{GM_S}{D^3}$:

$$0=-\frac{GM_S}{d^2}+\frac{GM_T}{(D-d)^2}+\frac{GM_S}{D^3}d$$

On divise par GM_S :

$$0=-\frac{1}{d^2}+\frac{\alpha}{(D-d)^2}+\frac{d}{D^3}$$

$$0 = -1 + \frac{\alpha x^2}{(1-x)^2} + x^3$$

2. Si on pose $\varepsilon = 1 - x = 0.011 = 1.1 \times 10^{-2} \ll 1$, l'équation devient :

$$1 - (1-\varepsilon)^3 = \frac{\alpha(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}$$

La chose à voir est que α est très petit, en effet $\alpha = M_T/M_S = 3 \times 10^{-6}$, donc un terme en $\frac{\alpha}{\varepsilon^2}$ pourra être du même ordre de grandeur qu'un terme en ε. Regardons le terme de droite : $\frac{\alpha(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{\alpha}{\varepsilon^2} - 2\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \times \varepsilon$. Le terme $\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \times \varepsilon \ll 2\frac{\alpha}{\varepsilon^2}$ car $\varepsilon \ll 1$. Le terme de gauche se simplifie à l'aide d'un DL : $1 - (1-\varepsilon)^3 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} 3\varepsilon$ On obtient alors :

$$\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3} = 1.0 \times 10^{-2}$$

On obtient donc une bonne approximation. L'intérêt de cette méthode n'est pas la valeur numérique (on peut l'obtenir numériquement avec des méthodes informatiques) mais plutôt que le DL nous a donné une expression théorique du paramètre recherché, on connaît donc ses dépendances et sa monotonie par rapport aux différents paramètres.

2 L'oscillateur harmonique en mécanique

Exercice 6 : Le système masse-ressort

1. $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ cf. cours page 13

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La solution est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B\omega_0 = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

2. $\ddot{z} + \omega_0 z = g$ cf cours page 8. On résout d'abord l'équation homogène associée :

$$\ddot{z} + \omega_0 z = 0$$

Donc $z_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ Et la solution particulière est de la forme du second membre, donc constante. On trouve $z_p = \frac{mg}{k}$. On a donc :

$$z(t) = z_h(t) + z_p = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}$$

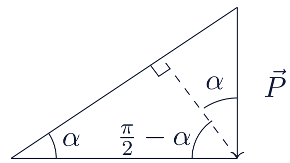
$$\begin{cases} z(t=0) = z_0 + \frac{mg}{k} \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = z_0 \\ B\omega_0 = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}$$

3. On fait le bilan des forces s'appliquant sur le sytème : il y a la force de rappel élastique $\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$, la réaction du support $\vec{R} = R\vec{u}_y$ (orthogonale au plan car il n'y a pas de frottements) et le poids $\vec{P}$. Il suffit de projeter le poids sur l'axe (Ox).



En appliquant les formules de trigonométrie dans le triangle du haut, on voit que $\vec{P} \cdot \vec{u}_x = -mg\sin(\alpha)$. On vérifie la projection en regardant les cas limites : si $\alpha = 0$, le poids n'a pas de composante horizontale, et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le poids est simplement $-mg$ selon l'axe (Ox). On applique donc le principe fondamental de la dynamique en projection selon $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - mg\sin(\alpha)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 - g\sin(\alpha)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 - g\sin(\alpha)$$

La solution de l'équation homogène associée est $x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. La solution particulière est $x_p = l_0 - \frac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2}$. Donc $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0 - \frac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2}$.

$$\begin{cases} x(t=0) = l_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + l_0 - \dfrac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2} = l_0 \\ B\omega_0 = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$x(t) = \frac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + l_0 - \frac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2}$$

Exercice 7 : Ressorts équivalents

1. La masse M est soumise aux forces des deux ressorts. On projette selon $\vec{u}_l$:

$$F_1 + F_2 = -k_1(l - l_0) - k_2(l - l_0) = -(k_1 + k_2)(l - l_0)$$

On remarque qu'il s'agit de l'expression de la force exercée par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur $k_{eq} = k_1 + k_2$. Par récurrence immédiate, pour n ressorts en parallèle,

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

2. On appelle A le point d'attache des deux ressorts. il est clair que la longueur à vide équivalente pour les deux ressorts est la somme des longueurs à vide de chacun des ressorts : l'équilibre glogal impose l'équilibre de chaque ressort. On applique le principe fondamental de la dynamique projeté sur la verticale descendante au point A. Puisqu'il est de masse nulle, la somme des forces qui s'exercent sur lui s'annule :

$$-k_1(l_1 - l_{01}) + k_2(l_2 - l_{02}) = 0$$

La masse M est soumise à la force de rappel du ressort 2 :

$$F = -k_2(l_2 - l_{02})$$

On cherche un expression de la forme :

$$F = -k_{eq}(l_1 + l_2 - l_{01} - l_{02})$$

$$k_2(l_2 - l_{02}) = k_{eq}(l_1 + l_2 - l_{01} - l_{02}) = k_{eq}(l_1 - l_{01}) + k_{eq}(l_2 - l_{02}) = keq\frac{k_2}{k_1}(l_2 - l_{02}) + k_{eq}(l_2 - l_{02})$$

$$k_2 = k_{eq}\left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Par récurrence immédiate, pour n ressorts en série, la longueur à vide équivalente est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_{0i}$, et la raideur équivalent vérifie :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k_i}$$

Exercice 8 : Élastique coupé en deux

Puisque c'est une boucle, on peut considérer qu'il est constitué de deux ressorts identiques (un de chaque côté), chacun de raideur k_0. Ils sont en parallèle, donc la raideur k de l'élastique non coupé vaut : $k = 2k_0$, donc $k_0 = k/2 = 5\mathrm{N\,m^{-1}}$. Une fois coupé, les deux branches se retrouvent l'une derrière l'autre, donc en série. La constante de raideur équivalente vaut alors, d'après l'exercice précédent : $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{2}{k_0}$, $k_{eq} = k_0/2 = 2.5\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Réponse 3

Exercice 9 : Ressorts et gravité

1. On projette tout sur l'axe (Oz). La masse m est soumise à son poids $P = -mg$, la force de rappel du ressort du bas, $F_1 = -k(z - l_0)$ et la force de rappel du ressort du haut, $F_2 = k((2L - z) - l_0)$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse m :

$$m\ddot{z} = -k(z - l_0) - k(z - 2L + l_0) - mg$$

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{k}{m}(l_0 - l_0 + 2L) - g = \frac{2k}{m}L - g$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 L - g$$

2. On résout pour z constant :

$$z_{eq} = L - \frac{g}{\omega_0^2}$$

On remarque que plus l'intensité de la pesanteur est faible, plus l'équilibre se rapproche d'une situation symétrique, et plus la raideur des ressorts augmente, et moins l'impact de la gravité se fait ressentir sur l'équilibre, ce qui est attendu.

3.

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = z_{eq}$$

4. On résout l'équation homogène associée $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$, $z_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. La solution particulière est de la même forme que le second membre, c'est-à-dire constante, $z_p = z_{eq}$. On a donc

$$z(t) = z_h(t) + z_p = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_{eq}$$

On a les conditions initiales :

$$\begin{cases} z(t=0) = 0 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + z_{eq} = 0 \\ B\omega_0 = 0 \end{cases}$$

$$z(t) = z_{eq}(1 - \cos(\omega_0 t))$$

Exercice 10 : Bille sur une tige en rotation

1. C'est un mouvement plan à vitesse de rotation constante, on va donc choisir les polaires de centre O.

2. Dans le plan horizontal, la masse est soumise à deux forces : la force de rappel élastique $F_{el} = -k(r - l_0)\vec{u}_r$, et la réaction de la tige $\vec{R} = R\vec{u}_\theta$ (elle est normale à la tige car il n'y a pas de frottements). On va appliquer le principe fondamental de la dynamique en projection selon $\vec{u}_r$. L'accélération selon $\vec{u}_r$ vaut $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$. Ainsi :

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -k(r - l_0)$$

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r = \frac{kl_0}{m}$$

Si $\frac{k}{m} > \omega^2$, on a un oscillateur harmonique. Si $\frac{k}{m} < \omega^2$, on a une divergence.

3. On suppose $\frac{k}{m} > \omega^2$. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$, et $r_{eq} = \frac{kl_0}{m\omega_0^2}$

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_{eq}$$

La solution de l'équation homogène associée est $r_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, et la solution particulière vaut $r_p = r_{eq}$. On a donc

$$r(t) = r_h(t) + r_p = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + r_{eq}$$

$$\begin{cases} r(t=0) = l_0 \\ \dot{r}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = (l_0 - r_{eq}) \\ B\omega_0 = v_0 \end{cases}$$

Finalement :

$$r(t) = (l_0 - r_{eq})\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + r_{eq}$$

On suppose $\frac{k}{m} < \omega^2$. On pose $\frac{1}{\tau} = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$, et $r_0 = \frac{kl_0\tau^2}{m}$. On a alors :

$$\ddot{r} - \frac{r}{\tau^2} = \frac{r_0}{\tau^2}$$

Pour résoudre l'équation homogène associée, on introduit les fonctions cosinus et sinus hyperbolique. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Tout ce qu'il faut savoir c'est que $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$. On a donc $r_h(t) = A\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sinh\left(\frac{t}{\tau}\right)$. La solution particulière est $r_p = r_0$. On a donc :

$$r(t) = r_h(t) + r_p = A\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) + r_0$$

$$\begin{cases} r(t=0) = l_0 \\ \dot{r}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = (l_0 - r_0) \\ \dfrac{B}{\tau} = v_0 \end{cases}$$

Donc :

$$r(t) = (l_0 - r_0)\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + v_0\tau\sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) + r_0$$

Cette solution diverge grossièrement, ce qui n'est évidemment pas réaliste : si l'on tend le ressort, au bout d'un moment on sort du domaine de linéarité et il empêche r de dépasser une certaine valeur.

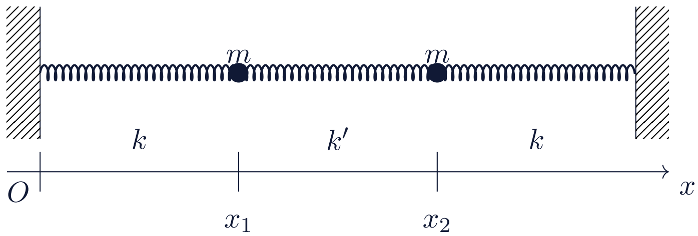
Exercice 11 : Ressort et pince

Cet exercice est une illustration éclatante du fait que la force, et donc l'accélération n'a aucune raison d'être continue. Par contre la position l'est ! Avant que la pince ne s'ouvre, 2 est en équilibre entre le poids et la force de rappel élastique. Donc le ressort exerce sur lui une force mg (en projection sur la verticale ascendante). Par principe des actions réciproques, il exerce une force $-mg$ sur le corps 1. La position est continue, donc le ressort est tendu de la même manière immédiatement après que la pince se soit ouverte qu'immédiatement avant. Puisque la force exercée par le ressort dépend uniquement de sa longueur, il exerce juste après l'ouverture la même force, $+mg$ sur le corps 2 et $-mg$ sur le corps 1. L'accélération du corps 1 vaut donc $a_1 = -g - g = -2g$, de norme $2g$, et l'accélération du corps 2 vaut $a_2 = +g - g = 0$.

Réponse 3

Exercice 12 : Oscillateurs harmoniques couplés

1.



Pour atteindre l'équilibre, puisque c'est possible, il faut que tous les oscillateurs soient à leur longueur à vide. Donc $x_{1eq} = l_0$ et $x_{2eq} = 2l_0$.

2. On écrit le PFD appliqué à M_1 :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - l_0) + k'(x_2 - x_1 - l_0)$$

De même le PFD appliqué à M_2 donne :

$$m\ddot{x}_2 = +k((3l_0 - x_2) - l_0) - k'(x_2 - x_1 - l_0)$$

On peut faire apparaître $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2(x_1 - l_0) + \frac{k'}{m}(x_2 - x_1 - l_0) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2(x_2 - 2l_0) + \frac{k'}{m}(x_1 - x_2 + l_0) \end{cases}$$

3. On remarque, qu'aux constantes près (qui ne changent rien à la méthode de résolution d'une équation différentielle), le couplage entre x_1 et x_2 est symétrique. On fait donc la somme et la différence. Soient $S = x_1 + x_2$ et $D = x_2 - x_1$;

$$\ddot{S} = -\omega_0^2(x_1 + x_2 - 3l_0) = -\omega_0^2 S + 3\omega_0^2 l_0$$

$$\ddot{D} = -\omega_0^2(x_2 - x_1 - 2l_0 + l_0) + \frac{k'}{m}(x_1 - x_2 + x_1 - x_2 + 2l_0) = -\left(\omega_0^2 + \frac{2k'}{m}\right)(D - l_0)$$

On définit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$, on a alors :

$$\ddot{D} = -\omega_1^2 D + \omega_1^2 l_0$$

$$\begin{cases} \ddot{S} = -\omega_0^2 S + 3\omega_0^2 l_0 \\ \ddot{D} = -\omega_1^2 D + \omega_1^2 l_0 \end{cases}$$

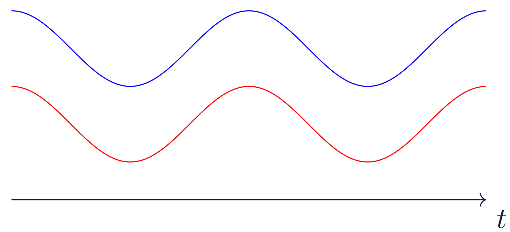
La solution générale de ces équations est :

$$\begin{cases} S(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + 3l_0 \\ D(t) = A'\cos(\omega_1 t) + B'\sin(\omega_1 t) + l_0 \end{cases}$$

4. $S(t=0) = A + 3l_0 = 3l_0 + 2a,\ A = 2a,\ \dot{S}(t=0) = B\omega_0 = 0.\ S(t) = 2a\cos(\omega_0 t) + 3l_0.$

$D(t=0) = A' + l_0 = l_0$, $A' = 0$, $\dot{D}(t=0) = B'\omega_1 = 0$, $B' = 0$. $D(t) = l_0$.

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{S(t) - D(t)}{2} = a\cos(\omega_0 t) + l_0 \\ x_2(t) = \dfrac{S(t) + D(t)}{2} = a\cos(\omega_0 t) + 2l_0 \end{cases}$$



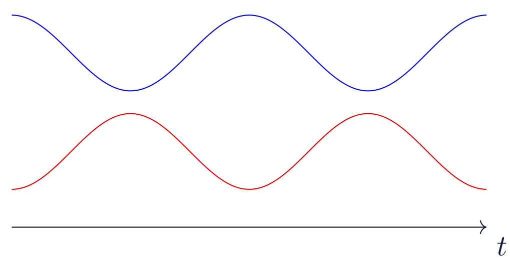
$x_1(t), x_2(t)$

Cela correspond à une solution où le mouvement des deux corps est le même, on peut donc parler de mode symétrique.

5. $S(t=0) = A + 3l_0 = 3l_0$, $A = 0$, $\dot{S}(t=0) = B\omega_0 = 0$, $B = 0$. $S(t) = 3l_0$

$D(t=0) = A' + l_0 = l_0 - 2a$, $A' = -2a$. $\dot{D}(t=0) = B'\omega_1 = 0$, $B' = 0$, $D(t) = -2a\cos(\omega_1 t) + l_0$.

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{S(t) - D(t)}{2} = a\cos(\omega_1 t) + l_0 \\ x_2(t) = \dfrac{S(t) + D(t)}{2} = -a\cos(\omega_1 t) + 2l_0 \end{cases}$$



$x_1(t), x_2(t)$

$\omega_1 > \omega_0$ car le ressort de couplage rapproche les deux masses quand elles s'éloignent, donc diminue la période, donc augmente la pulsation. Il s'agit d'un mode antisymétrique car le mouvement des deux corps est l'opposé l'un de l'autre.

6. $S(t=0) = A + 3l_0 = 3l_0 + a$, $A = a$. $\dot{S}(t=0) = B\omega_0 = 0$, $B = 0$. $S(t) = a\cos(\omega_0 t) + 3l_0$

$D(t=0) = A' + l_0 = l_0 - a$, $A' = -a$. $\dot{D}(t=0) = B'\omega_1 = 0$, $B' = 0$. $D(t) = -a\cos(\omega_1 t) + l_0$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{S(t) - D(t)}{2} = \dfrac{a}{2}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{a}{2}\cos(\omega_1 t) + l_0 \\ x_2(t) = \dfrac{S(t) + D(t)}{2} = \dfrac{a}{2}\cos(\omega_0 t) - \dfrac{a}{2}\cos(\omega_1 t) + 2l_0 \end{cases}$$

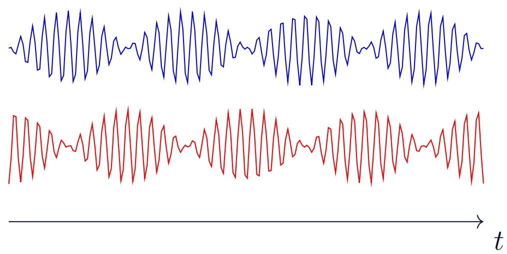
$\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)$

$\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t) = 2\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)$. Donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{S(t)-D(t)}{2} = a\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right) + l_0 \\ x_2(t) = \dfrac{S(t)+D(t)}{2} = a\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right) + 2l_0 \end{cases}$$

$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} \underset{k'\ll k}{\approx} \omega_0$. Et $\omega_1 - \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} - \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0\left(\sqrt{1+\dfrac{2k'}{k}} - 1\right) \underset{k'\ll k}{=} \omega_0\dfrac{k'}{k}$.

Chaque $x_i(t)$ est un produit de deux fonctions périodiques : une rapide, de pulsation ω_0 grande, et une lente, de pulsation $\omega_0\dfrac{k'}{k}$. On a donc des battements : une enveloppe lentement variable et une oscillation rapide.



$x_1(t), x_2(t)$

La fréquence des battements est $\omega_0\dfrac{k'}{k}$ alors même que dans le produit de fonctions périodiques, on a un $\cos\left(\dfrac{\omega_0}{2}\dfrac{k'}{k}\right)$, car cette oscillation lente correspond à l'enveloppe du signal, donc on est visuellement sensible à $\left|\cos\left(\dfrac{\omega_0}{2}\dfrac{k'}{k}\right)\right|$, de pulsation $\omega_0\dfrac{k'}{k}$.

On a donc un transfert d'énergie périodique d'un oscillateur à l'autre, par l'oscillateur de couplage.

Exercice 13 : Battements

En utilisant la partie 4.1 du cours, on sait que la fréquence des battements est $\omega = \omega_1 - \omega_0$, avec ω_1 la pulsation du mode antisymétrique, et ω_0 la pulsation du mode symétrique, c'est-à-dire des oscillateurs découplés. Les battements sont le produit d'une oscillation rapide et d'une enveloppe lente. Donc la fréquence des battements doit être faible (devant ω_0). Cela élimine d'emblée les réponses 3 et 4. On connaît ω_0, il suffit de calculer ω_1. Si on appelle x_i l'écart de l'oscillateur i à sa position d'équilibre. On cherche à connaître la pulsation du mode antisymétrique, c'est-à-dire celui où $x_1(t) = -x_2(t)$. On applique le PFD à l'oscillateur de gauche. On n'écrira pas les longueurs à vide puisqu'elles n'interviennent pas dans les pulsations. La force de rappel élastique exercée sur la masse de gauche vaut $F = F_g + F_d = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) = -(k+2k')x_1$ Donc la pulsation du mode antisymétrique vaut

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

Il ne reste plus qu'à faire le DL de $\omega_1 - \omega_0$

$$\omega = \omega_1 - \omega_0 = \left(\sqrt{1+2\frac{k'}{k}} - 1\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \underset{k'\ll k}{=} \frac{k'}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donc la fréquence vaut

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{k'}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Réponse 1

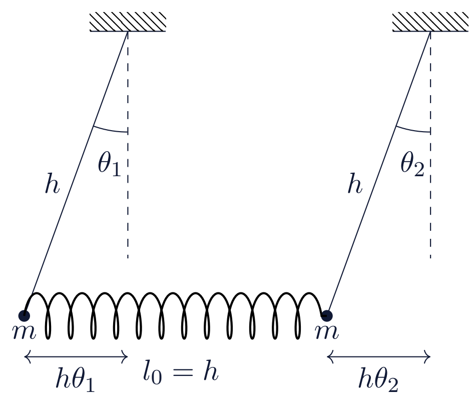
Exercice 14 : Pendules couplés

Il n'y a besoin de faire aucun calcul pour cet exercice : on sait que les pulsations des modes propres tendent vers la pulsation d'un oscillateur découplé quand le couplage tend vers 0, et la pulstion propre d'un pendule simple de longueur h est $\sqrt{\frac{g}{h}}$. La seule expression qui tende vers cette caleur quand K tend vers 0 est la **réponse 2** :

$$\sqrt{\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}}$$

Pour des raisons pédagogiques, je vais démontrer cette formule, mais dans le cadre d'un QCM, ce n'est pas du tout ce qui est demandé.

On fera l'approximation des petits angles, sans cela ce n'est de toute façon pas un oscillateur harmonique.



Le mode propre de plus haute fréquence est le mode antisymétrique. On impose donc $\theta_2 = -\theta_1$. La longueur du ressort est $h(\theta_2 - \theta_1 + 1)$. Donc la force sur la masse du pendule 2, en projection selon $\vec{u}_{\theta_2}$ vaut :

$$F = \vec{P} \cdot \vec{u}_{\theta_2} - Kh(\theta_2 - \theta_1 + 1 - 1)$$

La projection du poids selon $\vec{u}_{\theta_2}$ est simplement le calcul déjà fait sur le pendule simple aux petits angles, elle vaut donc $-mg\theta_2$. On a donc :

$$F = -mg\theta_2 - 2Kh\theta_2 = -(mg + 2Kh)\theta_2$$

L'accélération selon $\vec{u}_{\theta_2}$ vaut $a_\theta = (2\dot{h}\dot{\theta}_2 + h\ddot{\theta}_2)$. On obtient, en écrivant le principe fondamental de la dynamique :

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}\right)\theta_2 = 0$$

La pulsation de ce mode est donc :

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}}$$

Réponse 2

Exercice 15 : Ressorts et rotation

Plus ω est grand, plus le bloc ira vers de grands r (pensez à ce que vous ressentez lorsqu’une voiture empreinte un virage). Donc la réponse doit être croissante de ω, ce qui élimine 2 et 4. Ensuite on peut se dire que dans les équations, on a un ressort à gauche de raideur k et un ressort à droite de raideur $2k$, ce qui va donner $-k(r + \text{cste}) + 2k(\text{cste} - r) = -3kr + \text{cste}$, ce qui fait apparaître un $3k$. On s’attend donc à la **réponse 4**. En toute honnêteté, si vous avez la possibilité de faire un raisonnement aussi court, vous ne devriez par chercher à aller plus loin. On va ici faire la démonstration complète par pur intérêt pédagogique.

On se place en polaires dans le plan perpendiculaire à (Oz). On fait le bilan des forces agissant sur le bloc : il y a le poids et la réaction du support, qui sont normaux à l’axe (Or) (si on suppose qu’il n’y a pas de frottements), donc n’interviennent pas dans l’équilibre selon cet axe. Il y a la force de rappel élastique du premier ressort :

$$\vec{F}_{el1} = -k(r - l)\vec{u}_r$$

La force de rappel élastique du deuxième ressort :

$$\vec{F}_{el2} = -2k((3l - r) - 2l)(-\vec{u}_r) = -2k(r - l)\vec{u}_r$$

Et l’accélération en polaires, selon $\vec{u}_r$ à r constant vaut :

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$$

On applique le PFD en projection selon $\vec{u}_r$:

$$-mr\omega^2 = -3kr + 3kl$$

$$(3k - m\omega^2)r = 3kl$$

$$r_{eq} = \frac{3kl}{3k - m\omega^2}$$

Réponse 4

Exercice 16 : Ressort et mouvement relatif

Comme on l’a vu dans le cours (page 13), la longueur à l’équilibre d’un ressort suspendant une masse m est $l = l_0 + \frac{mg}{k}$. La seule réponse qui correspond à cela à $t = 0$ (la position étant continue) est la **réponse 2**. Mais on peut faire encore plus simple : les réponses 1 et 3 sont inhomogènes ($k/mg = (kl/mg) \times 1/l$ est homogène à l’inverse d’une longueur), et il est clair qu’à $t = 0$, quand le ressort est encore attaché en haut, la longueur du ressort est plus longue que l_0 parce que la gravité tire dessus. C’est donc la **réponse 2**. Par pur intérêt pédagogique, on va faire la démonstration de la formule obtenue, mais qu’on soit bien clair, vous ne devez pas faire ça pendant le QCM. Si vous ne trouvez pas de façon astucieuse de résoudre une question et que la méthode exacte n’est pas trop longue, vous pouvez faire le raisonnement complet. Mais si c’est long, il vaut mieux mettre un des résultats qui semble pouvoir marcher (homogène et qui a les bonnes monotonies par rapport aux paramètre pertinents du problème) et passer à la suite.

Appelons $z_1(t)$ la position de la masse du haut, et $z_2(t)$ de la masse du bas. $l(t) = z_2(t) - z_1(t)$. On oriente l'axe (Oz) vers le bas. Et on écrit l'équilibre mécanique de la masse 2, les forces s'y compensent à $t = 0^-$, $mg - k(z_2(t=0) - z_1(t=0) - l_0) = 0$,

$$z_2(t=0) - z_1(t=0) = l(t=0) = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Et la vitesse est continue, donc $\dot{l}(t=0) = 0$ On écrit le PFD à la masse 1 :

$$m\ddot{z}_1 = mg + k(z_2 - z_1 - l_0)$$

$$m\ddot{z}_2 = mg - k(z_2 - z_1 - l_0)$$

$$\ddot{l} = \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = g - \frac{k}{m}(z_2 - z_1 - l_0) - g - \frac{k}{m}(z_2 - z_1 - l_0) = -\frac{2k}{m}(l - l_0)$$

On pose $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$\ddot{l} + \omega^2 l = \omega^2 l_0$$

On résout l'équation homogène associée : $\ddot{l}_h + \omega^2 l_h = 0$, $l_h(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

On trouve une solution particulière, de la même forme que le second membre, donc constante, on trouve $l_p = l_0$.

$$l(t) = l_h(t) + l_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + l_0$$

On trouve les constantes avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} l(t=0) = A + l_0 = \frac{mg}{k} + l_0 \\ \dot{l}(t=0) = B\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{mg}{k} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$l(t) = l_0 + \frac{mg}{k}\cos(\omega t)$$

Réponse 2

Exercice 17 : Oscillateur à deux ressorts

Il faut que, quand k_1 et k_2 tendent vers 0, on tende vers la pulsation propre de l'autre oscillateur ($\sqrt{\frac{k_2}{m}}$ pour $k_1 \to 0$, et $\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ pour $k_2 \overrightarrow{0}$). Cela élimine 1 et 3. 2 fait intervenir les longueurs à vide dans la pulsation, ce qui n'est pas possible : en effet il faudrait qu'elles interviennent en produit devant le x, mais dans la force d'un ressort, elles n'interviennent que comme des constantes, pas en produit devant la position. C'est donc la **réponse 4**. On va, pour des raisons pédagogiques, faire la démonstration de la formule obtenue.

On fait le bilan des forces exercées sur le point M. Il y a le poids, qui est normal à l'axe (Ox), et la réaction du support, également normale à l'axe (Ox) car on suppose qu'il n'y a pas de frottements. Il y a ensuite la force de rappel élastique exercée par le ressort 1 :

$$\vec{F}_{el1} = -k_1(x - l_{01})\vec{u}_x$$

Il y a enfin la force de rappel élastique exercée par le ressort 2 :

$$\vec{F}_{el2} = -k_2((OO' - x) - l_{02})(-\vec{u}_x) = -k_2(x + l_{02} - OO')\vec{u}_x$$

On applique le PFD en projection selon (Ox) :

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_{01}) - k_2(x + l_{02} - OO') = -(k_1 + k_2)x + k_1 l_{01} - k_2 l_{02} + k_2 OO'$$

On remarque donc que la pulsation d'oscillation vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Réponse 4

Problème 1 : excitation de monoxyde de carbone dans l'air ambiant

1. On applique le PFD à chacun des deux atomes :

$$m_C \ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}_{O\to C}$$

$$m_O \ddot{\vec{r}}_O = \vec{F}_{C\to O} = -\vec{F}_{O\to C}$$

Par principe des actions réciproques. On a donc :

$$\ddot{\vec{r}}_G = \frac{m_C \ddot{\vec{r}}_C + m_O \ddot{\vec{r}}_O}{m_C + m_O} = \frac{1}{m_C + m_O}(\vec{F}_{O\to C} - \vec{F}_{O\to C}) = \vec{0}$$

Donc $\dot{\vec{r}}_G$ est constant.

Le référentiel dans lequel r_G est immobile est donc galiléen puiqu'il a été obtenu à partir d'une translation rectiligne uniforme depuis un référentiel galiléen.

2. On réutilise les résultats du PFD :

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_C - \ddot{\vec{r}}_O = \frac{1}{m_C}\vec{F}_{O\to C} + \frac{1}{m_O}\vec{F}_{O\to C}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_O}}\ddot{\vec{r}} = \frac{m_C m_O}{m_O + m_C}\ddot{\vec{r}} = \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{O\to C}$$

C'est l'écriture du PFD à une particule de masse μ de position $\vec{r}$ et subissant la force $\vec{F}_{O\to C}$.

3. Au voisinage de la position d'équilibre r_{eq}, on peut faire le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle :

$$U(r) \underset{|r-req|\ll r_{eq}}{=} U(r_{eq}) + \frac{dU}{dr}(r = r_{eq})(r - r_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dr^2}(r = r_{eq})(r - r_{eq})^2$$

Or r_{eq} est une position d'équilibre, donc un minimum de l'énergie potentielle, donc $\frac{dU}{dr}(r = r_{eq}) = 0$ et $\frac{d^2U}{dr^2}(r = r_{eq}) = k > 0$. On a alors :

$$U(r) \underset{|r-req|\ll r_{eq}}{=} U(r = r_{eq}) + \frac{1}{2}k(r - r_{eq})^2$$

C'est l'énergie potentielle d'un ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0 = r_{eq}$. S'il n'y a aucune rotation, la particule fictive est soumise à un oscillateur harmonique, donc oscille autour de r_{eq} à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ (puisque cette particule fictive est de masse μ).

4. On a :

$$\mu = \frac{m_C m_O}{m_O + m_C} = \frac{(M(C)/\mathcal{N}_A)(M(O)/\mathcal{N}_A)}{(M(O)/\mathcal{N}_A) + (M(C)/\mathcal{N}_A)} = \frac{1}{\mathcal{N}_A}\frac{M(C)M(O)}{M(O)+M(C)} = 1.14 \times 10^{-26}\text{kg}$$

Il faut bien faire attention, les masses molaires sont données en grammes par moles, mais l'unité SI est le kilogramme par mole.

5. Pour déterminer l'énergie cinétique, on détermine d'abord la vitesse :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Et $\omega_0^2 = \frac{k}{\mu}$ donc $k = \mu\omega_0^2$. On en déduit l'énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Par conséquent, puisque $E_m = E_c + E_p$, et que $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$, on en déduit que :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x_m^2(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x_m^2$$

6. La longueur d'onde $4.664\mu\text{m}$ appartient au domaine **infrarouge**.

7. On utilise la relation entre les niveaux d'énergie :

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{h\omega_0}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{h\omega_0}{2\pi} = \frac{hc}{\lambda}$$

8. Par ailleurs on a

$$c = f_0\lambda$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = 6.43 \times 10^{13} Hz$$

9. On peut écrire :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Ce qui donne :

$$k = 4\pi^2\mu f_0^2 = 1.86 \times 10^3 \text{N}\,\text{m}^{-1}$$

10. F^2 possède une liaison simple, O^2, N^2 une liaison triple. On constate que plus la valeur de la constante de raideur est élevée, plus la liaison est multiple. En effet, plus la raideur est grande, plus la liaison est forte et dure à casser (demande plus d'énergie pour la rompre).

11. En égalant l'expression classique et l'expression quantique pour le niveau $n = 1$:

$$\frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x_m^2 = \frac{3h\omega_0}{4\pi}$$

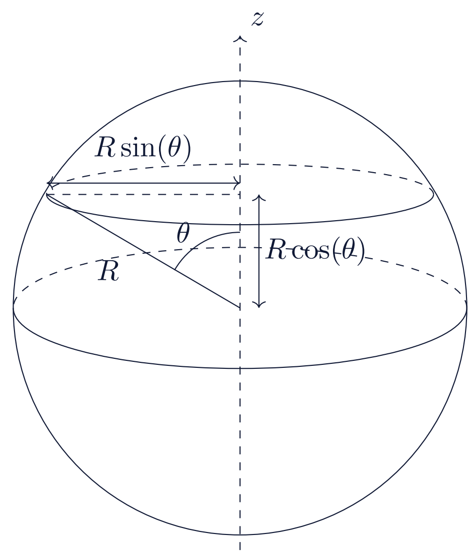
$$x_m = \sqrt{\frac{3h}{4\pi^2\mu f_0}} = 8.29\text{pm}$$

L'élongation est inférieure à 1/10 de la longueur de la liaison C-O, ce qui est cohérent avec l'approximation $|r - r_{eq}| \ll r_{eq}$.

Exercice 18 : Ressort massif sur une sphère

La clé est le choix du système de coordonnées. On est sur une sphère, donc le mieux est de choisir les coordonnées sphériques d'axe (Oz). Puisque le ressort est à l'horizontale, on est à φ fixé, en plus d'être à r fixé. On peut donc repérer la hauteur du ressort uniquement par l'angle θ. L'énergie potentielle du système est l'énergie potentielle de pesanteur plus l'énergie potentielle élastique. On va donc calculer ces deux énergies et trouver l'extremum. On verra ensuite s'il est stable.

Pour calculer ces deux énergies, il faut calculer la hauteur de l'élastique et sa longueur en fonction de θ.



Donc $E_{pp} = MgR\cos(\theta)$. Et $E_{pel} = \frac{1}{2}k(2\pi R\sin(\theta) - l_0)^2$.

$$E_p = MgR\cos(\theta) + \frac{1}{2}k(2\pi R\sin(\theta) - l_0)^2$$

On dérive l'énergie potentielle pour trouver les positions d'équilibre et déterminer leur stabilité :

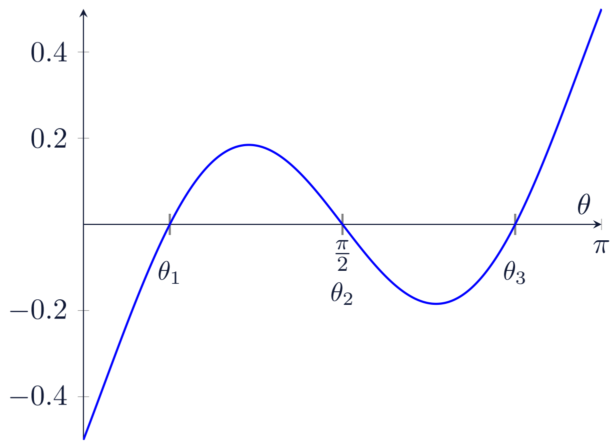
$$\begin{aligned}\frac{dE_p}{d\theta} &= 2\pi Rk\cos(\theta)(2\pi R\sin(\theta) - l_0) - MgR\sin(\theta)\\ &= 2\pi Rk\cos(\theta)\Big(2\pi R\sin(\theta) - l_0 - \frac{Mg}{2\pi k}\tan(\theta)\Big)\\ &= 4\pi^2R^2k\cos(\theta)\Big(\sin(\theta) - \Big(\frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2Rk}\tan(\theta)\Big)\Big)\end{aligned}$$

θ est l'angle des sphériques, donc varie entre 0 et π. Pour qu'il y ait une position d'équilibre, il faut que l'un des deux membres du produit s'annule. Or on ne peut pas trouver analytiquement les zéros de la fonction de droite. On fera donc une résolution graphique. Et si vous êtes arrivés là et que vous avez tenté une résolution graphique, c'est très très bien. Toute la discussion qui suit est longue et compliquée, et la correction officielle donnée par l'X fait comme si la question de la stabilité ne se posait pas, ce qui pourrait presque amener à penser que ceux qui ont écrit la correction n'ont simplement pas pensé à ça. Le cœur du problème est l'établissement de l'équation transcendantale.

On évacue déjà le cas limite $M = 0$. La dérivée de l'énergie potentielle devient :

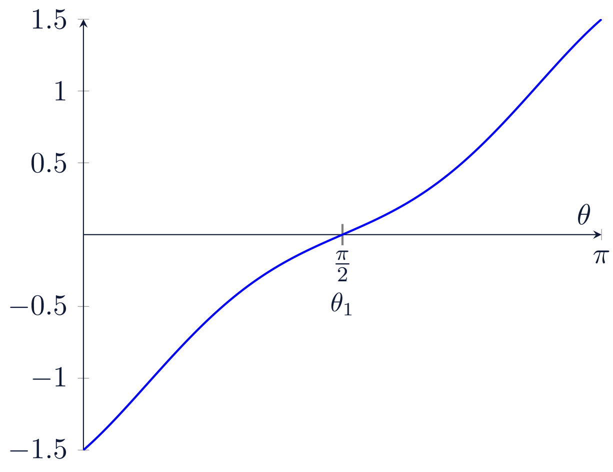
$$\frac{dE_p}{d\theta} = 4\pi^2 R^2 k \cos(\theta)\Big(\sin(\theta) - \frac{l_0}{2\pi R}\Big)$$

On trace cette fonction d'abord dans le cas $l_0 < 2\pi R$.



La force est l'opposée de la dérivée l'énergie potentielle, un point d'équilibre stable est tel que la force soit décroissante, donc on veut un point d'annulation où cette fonction soit croissante de θ. θ_1 et θ_3 sont stables, et θ_2 est instable. On peut donc très bien le comprendre qualitativement : $l_0 < 2\pi R$, donc il existe un θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que la longueur de l'élastique pour ce θ vaille l_0. Cela minimise donc l'énergie potentielle élastique. Par symétrie, $\pi - \theta$ convient également (puisqu'on suppose que le ressort est sans masse, le haut et le bas de la sphère sont équivalents. Et sur la sphère, la longueur de l'élastique est maximale au niveau de l'équateur, donc en $\frac{\pi}{2}$. C'est donc un maximum de l'énergie potentielle, ce qui en fait une position d'équilibre instable.

On trace ensuite cette fonction dans le cas $l_0 > 2\pi R$:



On remarque qu'il n'y a qu'une seule position d'équillibre, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et qu'elle est stable. Cela s'explique encore une fois très bien qualitativement, le rayon étant trop petit, toutes les longueurs possibles pour l'élastique sont plus petites que sa longueur à vide, la plus grande longueur de l'élastique minimise donc son énergie potentielle, et la plus grande longueur possible pour l'élastique est à l'équateur, en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Cependant, cette position n'est pas physiquement réalisable car elle brise la condition de contact. Cela sera discuté un peu plus bas.

On suppose désormais $M > 0$.

On veut trouver les annulations de la fonction

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 4\pi^2 R^2 k \cos(\theta)\Big(\sin(\theta) - \Big(\frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan(\theta)\Big)\Big)$$

et, puisque la force est l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle, et qu'un point d'équilibre stable est un point d'annulation de la force tel que la force y soit localement décroissante, on cherche un point d'annulation de cette fonction où elle soit localement croissante.

Cette fonction est un produit de deux fonctions. On évacue déjà la position $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui annule le cosinus. Puisque $M \neq 0$, on a :

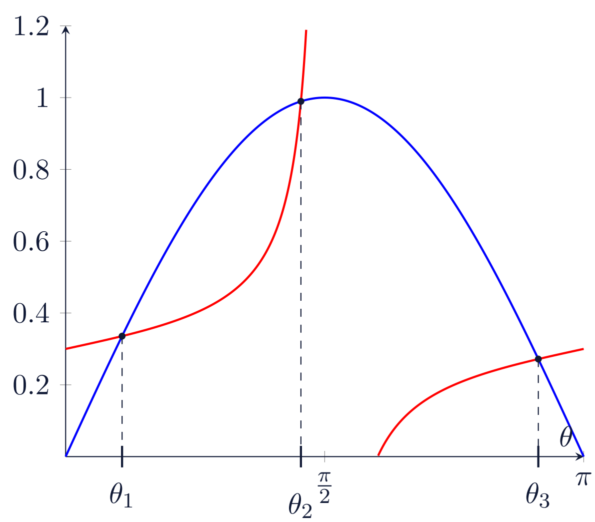
$$\cos(\theta)\Big(\sin(\theta) - \Big(\frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan(\theta)\Big)\Big) \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{=} -\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\cos(\theta)\tan(\theta)$$

$$\underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{=} -\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\sin(\theta) \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{\to} -\frac{Mg}{4\pi^2 Rk} < 0$$

Donc $\frac{\pi}{2}$ n'est pas une position d'équilibre. On a donc uniquement à s'intéresser aux annulations de la fonction :

$$f(\theta) = \sin(\theta) - \Big(\frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan(\theta)\Big)$$

On voit que si $\frac{l_0}{2\pi R}$ est suffisamment grand, le terme de droite sera toujours au-dessus du sinus, et il n'y aura pas de solution pour $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. On trace donc $\sin(\theta)$ en bleu et $\frac{l_0}{2\pi R} + \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan(\theta)$ en rouge pour un l_0 suffisamment petit :



Pour θ_1, on remarque que la pente du sinus est plus grande que la pente du terme de droite, f est donc localement croissante, $f'(\theta_1) > 0$. On peut donc calculer :

$$\left.\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_1} = 4\pi^2 R^2 k(f'(\theta_1)\cos(\theta_1) - f(\theta_1)\sin(\theta_1)) = 4\pi^2 R^2 k f'(\theta_1)\cos(\theta_1) > 0$$

Donc θ_1 est une position d'équilibre stable.

Pour θ_2 puisque la pente de sinus est plus faible que la pente de la fonction de droite dans f, f est localemet décroissante en θ_2, $f'(\theta_2) < 0$. En fait le même calcul que pour θ_1 :

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_2} = 4\pi^2R^2kf'(\theta_2)\cos(\theta_2) < 0$$

Donc θ_2 est une position d'équilibre instable.

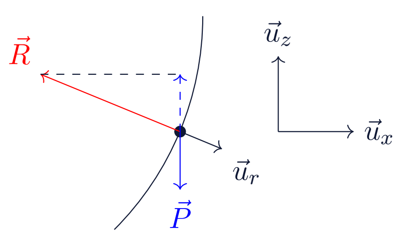
Enfin, pour θ_3, on remarque que la pente de sinus est plus petite que la pente de la fonction de droite, donc $f'(\theta_3) < 0$. Mais puisque $\theta_3 \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, $\cos(\theta_3) < 0$ Donc :

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_3} = 4\pi^2R^2kf'(\theta_3)\cos(\theta_3) > 0$$

Donc θ_3 est une position d'équilibre stable.

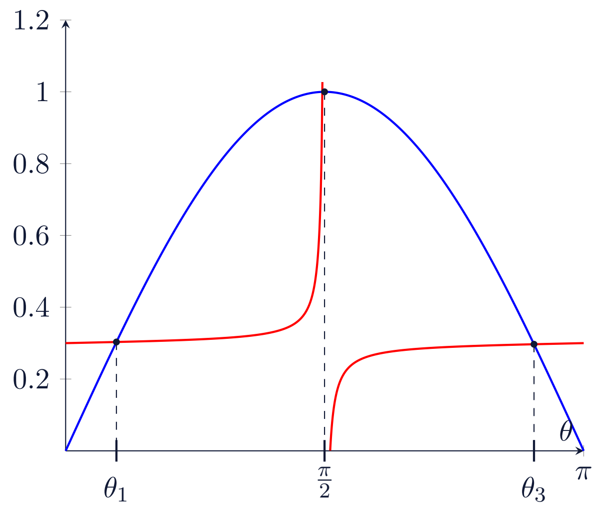
Analysons un peu ces résultats. Il semble logique que θ_1 soit stable, il 'agit d'une position proche de la longueur à vide du ressort, mais un peu plus bas à cause de la gravité. C'est le prolongement continu de θ_1 dans le cas où $M > 0$. On peut comprendre que θ_2 soit instable : le ressort est à un point de compensation des forces gravitationnelles et élastiques, mais c'est un point où la longueur du ressort est maximale, le ressort est trop tendu, il va donc "sauter" à la moindre perturbation.

Vient ensuite la discussion plus délicate de θ_3. Mathématiquement, on a prouvé que c'était une position d'équilibre stable. Cependant on peut se demander comment il est possible qu'une position soit stable alors qu'elle est en bas de la sphère, le ressort ne devrait-il pas tomber ? Et bien si, absolument, seulement notre modèle qui décrit l'énergie potentielle du système ne décrit pas la condition grâce à laquelle le ressort tient sur la sphère. En effet, comme vous le verrez en mécanique, il y a contact tant que la réaction du support est positive selon la normale à la surface : ici, il faut que $\vec{R}\cdot\vec{u}_r > 0$. Et la force $\vec{R}$ ne travaille pas, donc n'est pas prise en compte dans notre modèle énergétique. Et pour que la position θ_3 soit atteinte, on voit que le poids tire vers le bas, que la tension de rappel élastique tire dans le plan horizontal, ce qui impose la réaction de la sphère à tirer vers le haut, donc cela implique $\vec{R}\cdot\vec{u}_r < 0$. C'est la condition de non-contact, cela veut donc dire que l'élastique rompt le contact avec la sphère. Donc, θ_3 est bien un minimum de l'énergie potentielle, mais des aspects non-énergétiques de la mécanique rendent cette position impossible.

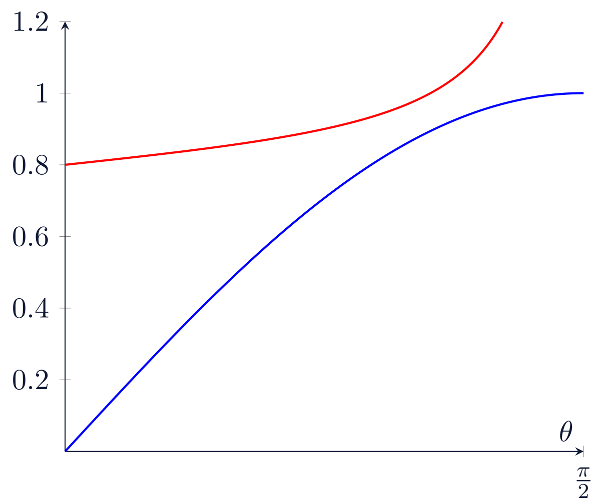


Puisque $\vec{P}$ est selon $\vec{u}_z$ vers le bas, et que la tension du ressort est selon $\vec{u}_x$, par principe fondamental de la statique, $\vec{R}$ a une composante non nulle positive selon $\vec{u}_z$. Or elle est colinéaire à $\vec{u}_r$ parce qu'on suppose qu'il n'y a pas de frottements. Cela fait qu'elle est nécessairement dans l'autre sens que $\vec{u}_r$. Ce qui impose $\vec{R}\cdot\vec{u}_r < 0$.

Donc θ_3 n'est pas une position accessible. Regardons maintenant quelques cas limites. Quand $M \ll \frac{kR}{g}$, la tangente est de plus en plus écrasée, et ne prend des valeurs importantes que quand elle diverge, donc proche de $\frac{\pi}{2}$. Donc $\theta_2 \underset{M \ll \frac{kR}{g}}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, comme tangente s'écrase, les valeurs de θ_1 et θ_2 sont à peu de choses près dictées par l'équation $\sin(\theta) = \frac{l_0}{2\pi R}$. On se rapproche donc continûment du cas $M = 0$, ce qui explique à nouveau l'instabilité de θ_2 et la stabilité énergétique de θ_1 et θ_3.



Regardons maintenant ce qu'il se passe quand l_0 augmente. $\frac{l_0}{2\pi R}$ est la valeur en 0 du membre de droite dans f, donc si l_0 grandit, il n'y aura plus de solution entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on se restreint à cet intervalle puisqu'on a dit que les solutions plus grandes que π n'ont pas de réalité physique) :



Les deux solutions d'équilibre se rapprochent quand l_0 augmente, puis deviennent égales, puis disparaissent. Quand il n'y a qu'une solution, les deux courbes sont tangentes. Leurs dérivées sont donc égales. On a alors 2 équations, qui nous permettent de prédire la valeur critique de l_0 à partir de laquelle une solution d'équilibre (stable) existe :

$$\begin{cases} f(\theta) = 0 \\ f'(\theta) = 0 \end{cases}$$

Il se trouve qu’on peut résoudre explicitement $f'(\theta) = 0$!

$$f'(\theta) = \cos(\theta) - \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$
$$\cos^3(\theta) = \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}$$

Et $\theta \in [0, \pi]$, donc on peut utiliser arcos sans peur :

$$\theta = \text{arcos}\Big(\Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{1/3}\Big)$$

On réinjecte dans l’équation $f(\theta) = 0$ et on obtient pour l_c la longueur critique :

$$\sin(\theta) - \frac{l_c}{2\pi R} - \frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan(\theta) = 0$$
$$l_c = 2\pi R\Big(\sin\Big(\text{arcos}\Big(\Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{1/3}\Big)\Big) - -\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\tan\Big(\text{arcos}\Big(\Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{1/3}\Big)\Big)\Big)$$

Pour $l_0 < l_c$ il y a deux positions d’équilibre, dont une stable, et pour $l_0 > l_c$, il n’y a pas de position d’équilibre. On peut simplifier l’expression de l_c avec les formules trigonométriques suivantes : $\sin(\text{arcos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\tan(\text{arcos}(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$:

$$l_c = 2\pi R\Big(1 - \Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{2/3}\Big)\sqrt{1 - \Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{2/3}} = 2\pi R\Big(1 - \Big(\frac{Mg}{4\pi^2 Rk}\Big)^{2/3}\Big)^{3/2}$$

(On les obtient en posant $\theta = \text{arcos}(x)$ dans $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$). Cela nous donne explicitement les dépendances de la longueur à vide critique. On remarque que $l_c < 2\pi R$, c’est-à-dire que la gravité réduit la longueur à vide maximale permettant d’atteindre l’équilibre. Cela peut se comprendre : si on est en présence de gravité, la longueur à vide $2\pi R$, qui ne peut être atteinte qu’à l’équateur, est instable (à l’équateur, le poids tire vers le bas et rien ne le contre). La gravité rend donc instable des longueurs proches de l’équateur, qui, en abscence de gravité, permettraient d’atteindre l’équilibre.

Regardons enfin ce qui se passe quand l_0 est petit. On voit graphiquement qu’on fait descendre la courbe rouge, ce qui fait progressivement tendre θ_1, la seule position d’équilibre stable, vers 0.

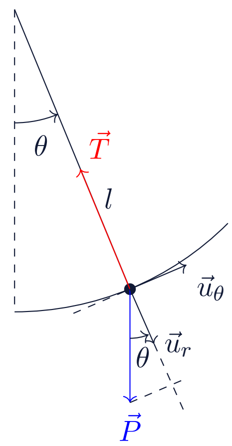
C’est un bel exo.

Exercice 19 : Quasi-ressort

Cf. cours pages 11-12.

Exercice 20 : Pendule simple

1. On va utiliser les coordonnées polaires de centre 0. On fait le bilan des forces s’appliquant à m :



Il y a la tension de la corde : $\vec{T} = -T\vec{u}_r$. On ne peut pas connaître l'expression générale de cette force, on va donc devoir projeter le PFD sur l'axe orthogonal à $\vec{T}$ pour éviter ce problème, c'est-à-dire $\vec{u}_\theta$.

Il y a le poids : $\vec{P}\cdot\vec{u}_\theta = -mg\sin(\theta)$

L'accélération selon $\vec{u}_\theta$ vaut :

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = l\ddot{\theta}$$

On applique le PFD à m en projection selon $\vec{u}_\theta$:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

2. On cherche les θ_{eq} tels que $\sin(\theta_{eq}) = 0$, c'est-à-dire $\theta_{eq} = 0$ et $\theta_{eq} = \pi$.

3. $\sin$ est croissante autour de 0, donc $-\frac{g}{l}\sin(\theta)$ est décroissante autour de 0, donc $\theta_{eq} = 0$ est une position d'équilibre stable. $\sin$ est décroissante au voisinage de π, donc $-\frac{g}{l}\sin(\theta)$ est croissante autour de π, donc $\theta_{eq} = \pi$ est une position d'équilibre instable.

4. On suppose $|\theta| \ll 1$. On rappelle le DL à l'ordre 1 de $\sin$ au voisinage de 0 : $\sin(x) \underset{|x|\ll 1}{=} x$. Donc :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \underset{|\theta|\ll 1}{=} -\frac{g}{l}\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On a donc un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Exercice 21 : Formule de Borda

1. Cf. exercice 20 :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

2. Cf. exercice 20 : On a un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3. On a maintenant l'équation approchée :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\Big(\theta - \frac{\theta^3}{6}\Big)$$

On réinjecte $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ dans cette équation :

$$-\omega^2\theta_0\cos(\omega t) = -\omega_0^2\Big(\theta_0\cos(\omega t) - \frac{\theta_0^3}{6}\cos^3(\omega t)\Big)$$

On utilise ensuite la formule trigonométrique donnée :

$$-\omega^2\theta_0\cos(\omega t) = -\omega_0^2\Big(\theta_0\cos(\omega t) - \frac{\theta_0^3}{24}(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t))\Big)$$

$$-\omega^2\theta_0\cos(\omega t) = -\omega_0^2\Big(\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{8}\Big) + \frac{\omega_0^2\theta_0^3}{24}\cos(3\omega t)$$

On identifie donc :

$$-\omega^2\theta_0 = -\omega_0^2\Big(\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{8}\Big)$$

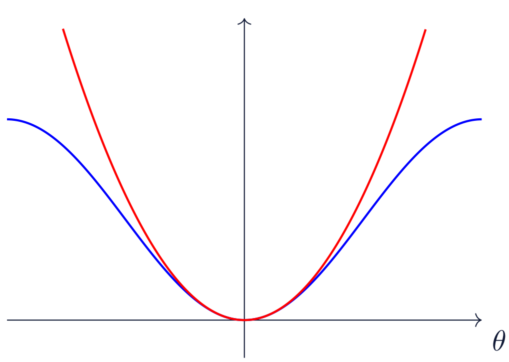
$$\omega^2 = \omega_0^2\Big(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\Big)$$

Et on a une période de :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\theta_0^2}{8}}} = T_0\Big(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\Big)^{-1/2} \underset{|\theta_0|\ll 1}{=} T_0\Big(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\Big)$$

C'est la formule de Borda. L'approximation d'oscillateur harmonique est très bonne car le terme correctif est non seulement en θ_0^2, donc d'ordre 2, mais en plus il y a un facteur $\frac{1}{16}$ qui réduit grandement l'influence du terme correctif. Même si on prend $\theta_0 = 2\text{rad} \approx 115°$, qui n'est pas un petit angle, l'erreur relative n'est que de 10%. On est donc très proche de l'harmonicité (la non dépendance de la période en les conditions intiales).

4. On trace en rouge l'énergie potentielle parabolisée, et en bleu l'énergie potentielle de pesanteur réelle :



On remarque que la pente de l'énergie potentielle réelle est plus faible que la pente de l'énergie potentielle parabolisée, donc la force de rappel réelle est moins forte que la force de rappel linéaire, donc le système est moins poussé à vite revenir à la position d'équilibre, donc T est plus grand que T_0. Et puisque la pente de l'énergie potentielle réelle diminue en valeur absolue quand θ_0 augmente, plus θ_0 augmente, plus la force de rappel au niveau de θ_0 est faible, donc plus le système prend du temps à revenir à sa position d'équilibre. C'est pourquoi T est croissante de θ_0.

Exercice 22 : Pendule accéléré

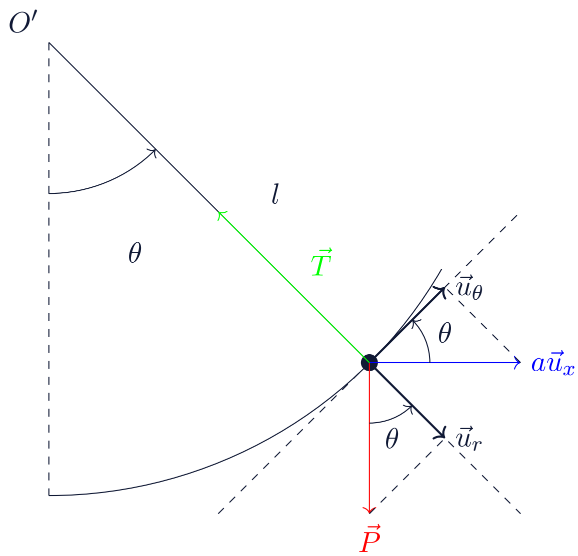
On veut pouvoir calculer l'accélération du point M. On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Donc l'accélération du point M vaut :

$$\vec{a}_{tot} = a\vec{u}_x + \vec{a}_{\text{Polaires centre } O'}$$

On fait le bilan des forces qui s'appliquent sur le pendule.



Il y a la tension du fil, $\vec{T} = -T\vec{u}_r$. On ne peut pas connaître l'expression générale de cette force, il va donc falloir projeter le PFD sur l'orthogonal à $\vec{T}$, c'est-à-dire $\vec{u}_\theta$.

On pourrait la refaire, mais la projection du poids selon $\vec{u}_\theta$ est exactement la même pour le pendule simple non accéléré (cf.exercice 20), on a donc $\vec{P} \cdot \vec{u}_\theta = -mg\sin(\theta)$.

On a projeté toutes les forces, mais pour pouvoir écrire le PFD il faut également projeter $a\vec{u}_x$ dans la base polaire (pour pouvoir écrire la partie accélération du PFD). Sur le schéma on voit $a\vec{u}_x \cdot \vec{u}_\theta = a\cos(\theta)$.

On écrit ensuite l'accélération dans la base polaire selon $\vec{u}_\theta$, sachant que l est constant :

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = l\ddot{\theta}$$

On écrit le PFD en projection selon $\vec{u}_\theta$:

$$m(a\cos(\theta) + l\ddot{\theta}) = -mg\sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{a}{l}\cos(\theta)$$

La position d'équilibre vérifie

$$\sin(\theta_{eq}) = -\frac{a}{g}\cos(\theta_{eq})$$

Et $\cos(\theta_{eq})$ n'est pas nul car cosinus ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$, et en ce point, sinus n'est pas nul. On peut donc diviser par $\cos(\theta_{eq})$ sans risquer de perdre une position d'équilibre.

$$\tan(\theta_{eq}) = -\frac{a}{g}$$

$$\theta_{eq} = -\arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

Si $a = 0$, on retrouve bien $\theta_{eq} = 0$. On voit que si $a > 0$, la position d'équilibre est décalée vers la gauche, ce qui correspond bien à ce à quoi on s'attend. On va maintenant calculer la pulsation des petites oscillations. On suppose $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| \ll 1$.

$$\cos(\theta_{eq} + \varepsilon) \underset{|\varepsilon|\ll 1}{=} \cos(\theta_{eq}) - \sin(\theta_{eq})\varepsilon$$

$$\sin(\theta_{eq} + \varepsilon) \underset{|\varepsilon|\ll 1}{=} \sin(\theta_{eq}) + \cos(\theta_{eq})\varepsilon$$

On réinjecte le tout dans l'équation, et on ne s'embête pas à calculer le terme constant, puisqu'il correspond à l'équilibre donc s'annule :

$$\ddot{\varepsilon} \underset{|\varepsilon|\ll 1}{=} -\frac{g}{l}\cos(\theta_{eq})\varepsilon + \frac{a}{l}\sin(\theta_{eq})\varepsilon = -\frac{\cos(\theta_{eq})}{l}(g - a\tan(\theta_{eq})) = -\frac{\cos(\theta_{eq})}{l}\left(g + \frac{a^2}{g}\right)\varepsilon$$

Et θ_{eq} est une arctangente donc est dans $[-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos(\theta_{eq}) \geqslant 0$. Donc la position d'équilibre est stable, et la pulsation des petites oscillations vaut :

$$\omega_0 = \left(\frac{\cos(\theta_{eq})}{l}\left(g + \frac{a^2}{g}\right)\right)^{1/2}$$

En terminale, on peut s'arrêter là. Je vais juste vous montrer une petite astuce pour se débarasser du $\cos(\theta_{eq})$ et obtenir une expression plus jolie et lisible :

$$\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x)) = 1$$

$$1 + \tan^2(\arctan(x)) = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}$$

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}$$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Car, comme on l'a déjà dit, $\cos(\arctan(x)) \geqslant 0$. Si on reprend notre formule pour la pulsation propre du pendule accéléré :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{l}\frac{g + \frac{a^2}{g}}{\sqrt{1 + (\frac{a}{g})^2}} = \frac{1}{l}\frac{g^2 + a^2}{\sqrt{g^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

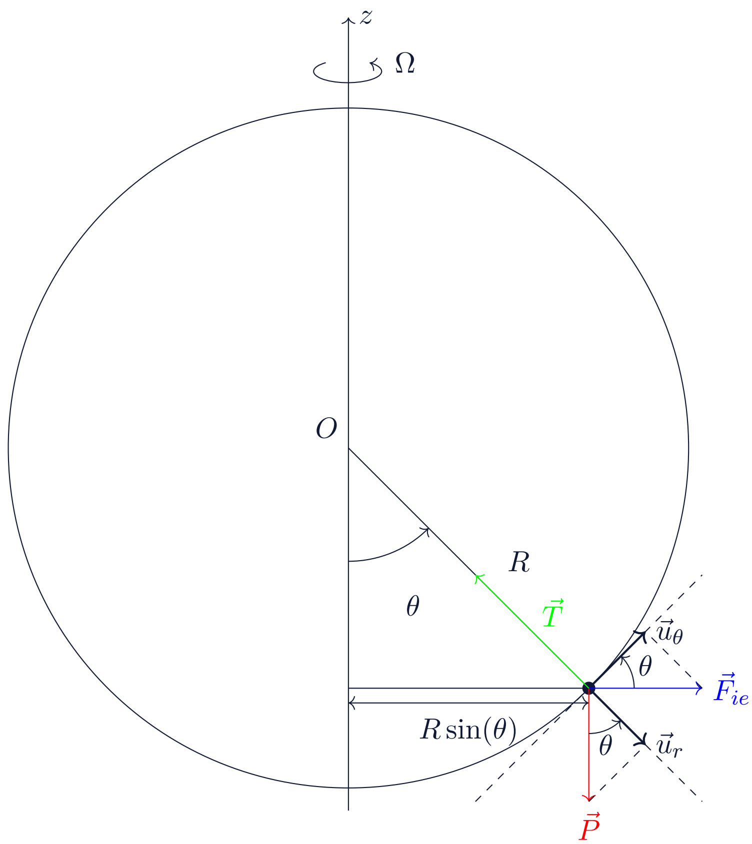
$$\omega_0 = \left(\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}\right)^{1/2}$$

On retrouve bien la pulsation propre du pendule simple dans le cas $a = 0$.

Exercice 23 : Bille sur un anneau en rotation

1. La bille est astreinte à se déplacer sur un cercle de centre O, les coordonnées les plus adaptées sont donc les polaires de centre O.

2. On va appliquer le PFD. On fait le bilan des forces qui s'appliquent au système :



Il y a la réaction de l'anneau, qui est normale à l'anneau car on ne considère pas les frottements, $\vec{T} = -T\vec{u}_r$. On ne peut pas connaître l'expression générale de cette force, il va donc falloir projeter le PFD sur l'axe orthogonal à $\vec{T}$, pour éviter ce problème. C'est-à-dire selon $\vec{u}_\theta$.

Il y a la force d'inertie d'entraînement, $\vec{F}_{ie} \cdot \vec{u}_\theta = \left\|\vec{F}_{ie}\right\| \cos(\theta) = m\Omega^2 R \sin(\theta)\cos(\theta)$.

Et enfin, le poids, $\vec{P} \cdot \vec{u}_\theta = -mg\sin(\theta)$.

L'accélération en polaire selon $\vec{u}_\theta$ à r fixé vaut $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = R\ddot{\theta}$. On applique le PFD :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + m\Omega^2 R\sin(\theta)\cos(\theta)$$

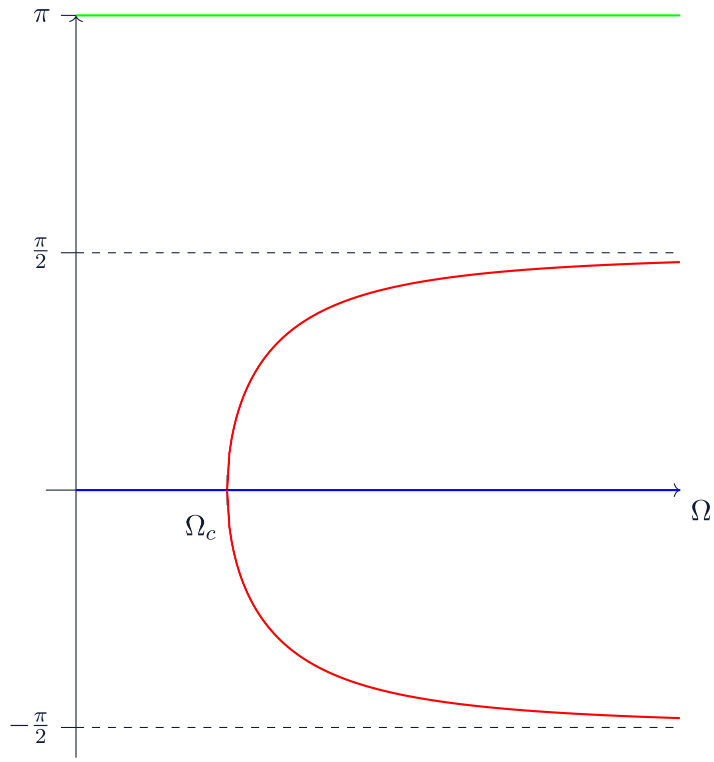
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin(\theta) + \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

3. Les positions d'équilibre sont les solutions de l'équation :

$$-\frac{g}{R}\sin(\theta) + \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$$

$$\sin(\theta)\left(\Omega^2\cos(\theta) - \frac{g}{R}\right) = 0$$

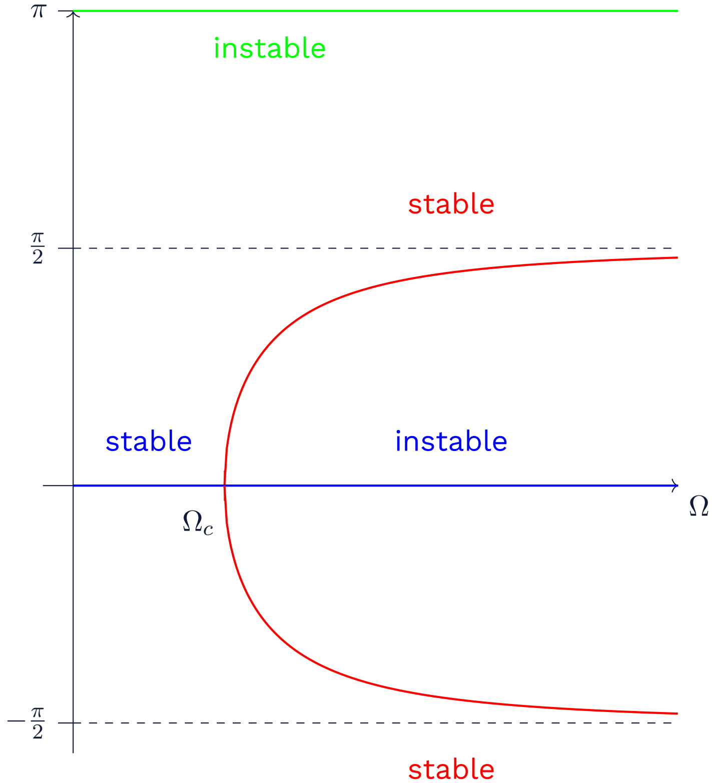
Donc on a $\theta_{eq1} = 0$ et $\theta_{eq2} = \pi$. Si $\Omega^2 < \dfrac{g}{R}$, il n'y a pas d'autre positon d'équilibre. On définit donc $\Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$. Si $\Omega > \Omega_c$, on a deux autres positions d'équilibre : $\theta_{eq\pm} = \pm\text{arcos}\left(\dfrac{\Omega_c^2}{\Omega^2}\right)$. Cela nous permet d'établir le graphique suivant, des positions d'équilibre en fonction de Ω :



4. Si $\Omega > \Omega_c$, la stabilité des positions $\theta_{eq\pm}$ a été montrée dans le cours aux pages 8 et 9. Il est clair que $\theta_{eq2} = \pi$ est toujours instable, on va donc s'intéresser à $\theta_{eq1} = 0$. On va faire un DL au voisinage de 0. On suppose que $|\theta| \ll 1$. On a donc :

$$\ddot{\theta} = -\Omega_c^2 \sin(\theta) + \Omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) \underset{|\theta|\ll 1}{=} -\Omega_c^2\theta + \Omega^2\theta \times 1 = -(\Omega_c^2 - \Omega^2)\theta$$

Cette position est donc stable pour $\Omega < \Omega_c$, et instable pour $\Omega > \Omega_c$. On rapporte le tout sur le graphique de la question précédente :



Il y a bifurcation car la position d'équilibre stable $\theta_{eq1} = 0$ devient instable et se sépare en deux positions d'équilibre stables, l'une positive, l'autre négative.

Exercice 24 : Énergie, force, équilibre et stabilité

Comme on l'a dit dans le cours, une position d'équilibre est un point d'annulation de la force (x_1) et un extremum de l'énergie potentielle (x_4). Il faut donc avoir : $x_1 = x_4$. **Réponse 2**.

Exercice 25 : Énergie et stabilité

On remarque qu'il y a deux extrema de l'énergie potentielle, c'est-à-dire deux positions d'équilibre : $r = 0$, qui est un minimum de U, donc une position d'équilibre stable, et un certain $r > 0$, qui est un maximum de U, donc une position d'équilibre instable. La seule affirmation vraie est donc qu'il y a une position d'équilibre instable non nulle, c'est-à-dire la **Réponse 4**.

Exercice 26 : Force centrale

1. La force est à symétrie sphérique et le mouvement se fait dans un plan, on choisit donc les polaires de centre O.

2. On écrit le PFD appliqué à la masse m en polaires :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{k}{r^n} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

On cherche une orbite circulaire, c'est-à-dire $r = r_0$. On simplifie donc les équations :

$$\begin{cases} -mr_0\dot{\theta}^2 = -\dfrac{k}{r_0^n} \\ mr_0\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Donc $\dot{\theta}$ est constant, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$. On le réinjecte dans la première équation :

$$r_0\dot{\theta}_0^2 = \frac{k}{mr_0^n}$$

SI r_0 et $\dot{\theta}_0$ vérifient cette équation, le mouvement est circulaire.

3. On réécrit le PFD dans ce cas :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{k}{mr^n} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation on déduit, grâce à la formule donnée, que

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

Donc $r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0$. Ce qui nous permet de faire disparaître $\dot{\theta}$ en l'exprimant en fonction de r :

$$\dot{\theta} = \frac{r_0^2}{r^2}\dot{\theta}_0$$

On réinjecte cette expression dans la première équation du PFD :

$$\ddot{r} - r\left(\frac{r_0^2}{r^2}\dot{\theta}_0\right)^2 = -\frac{k}{mr^n}$$

$$\ddot{r} - \frac{r_0^4}{r^3}\dot{\theta}_0^2 = -\frac{k}{mr^n}$$

On utilise ensuite l'écriture $r = r_0 + \delta r$:

$$\delta\ddot{r} - \frac{r_0^4}{(r_0+\delta r)^3}\dot{\theta}_0^2 = -\frac{k}{m(r_0+\delta r)^n}$$

$$\delta\ddot{r} - r_0\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-3}\dot{\theta}_0^2 = -\frac{k}{mr_0^n}\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-n}$$

On fait ensuite les DL en utilisant $\frac{\delta r}{r_0} \ll 1$ et $(1+x)^\alpha \underset{x \ll 1}{=} 1 + \alpha x$, et on ne calcule pas les termes constants, ils s'annulent puisqu'ils correpondent au mouvement circulaire, donc sont égaux :

$$\delta\ddot{r} + 3\dot{\theta}_0^2\delta r = n\frac{k}{mr_0^{n+1}}\delta r$$

$$\delta\ddot{r} + \left(3\dot{\theta}_0^2 - n\frac{k}{mr_0^{n+1}}\right)\delta r = 0$$

On utilise la relation trouvée à la question précédente :

$$\frac{k}{mr_0^{n+1}} = \dot{\theta}_0^2$$

Ce qui donne :

$$\delta\ddot{r} + (3\dot{\theta}_0^2 - n\dot{\theta}_0^2)\delta r = 0$$
$$\delta\ddot{r} + (3 - n)\dot{\theta}_0^2\delta r = 0$$

4. Si $n < 3$, l'orbite circulaire est stable. Si $n > 3$, l'orbite circulaire est instable. Pour $n = 3$, l'ordre 1 ne permet pas de conclure. Il faudrait faire une étude aux ordres plus élevés, ce que vous ne pouvez pas faire avec uniquement les DL à l'ordre 1.

5. Les questions intermédiaires précédentes nous donnent la marche à suivre, il suffit de répliquer la méthode. On suppose que le mouvement est circulaire de rayon r_0 et on écrit le PFD dans ce cas :

$$\begin{cases} r_0\dot{\theta}^2 = & \dfrac{k}{mr_0^2}\exp(-ar_0) \\ \ddot{\theta} = & 0 \end{cases}$$

Donc $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$. On obtient alors la condition :

$$r_0\dot{\theta}_0^2 = \frac{k}{mr_0^2}\exp(-ar_0)$$

On suppose que l'on a légèrement perturbé l'orbite circulaire, on pose donc $r = r_0 + \delta r$ avec $\frac{\delta r}{r_0} \ll 1$. Le PFD selon $\vec{u}_\theta$ donne, comme tout à l'heure :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

Donc $r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0$, on exprime alors $\dot{\theta}$ en fonction de r :

$$\dot{\theta} = \frac{r_0^2}{r^2}\dot{\theta}_0$$

On le réinjecte dans le PFD selon $\vec{u}_r$:

$$\ddot{r} - r\frac{r_0^4}{r^4}\dot{\theta}_0^2 = -\frac{k}{mr^2}\exp(-ar)$$
$$\ddot{r} - \frac{r_0^4}{r^3}\dot{\theta}_0^2 = -\frac{k}{mr^2}\exp(-ar)$$

On fait ensuite le DL de tous les termes en r au voisinage de r_0 :

$$\frac{r_0^4}{r^3}\theta_0^2 = \frac{r_0^4}{(r_0 + \delta r)^3}\dot{\theta}_0^2$$
$$= r_0\dot{\theta}_0^2\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-3}$$
$$\underset{\frac{\delta r}{r_0} \ll 1}{=} \text{cste} - 3\dot{\theta}_0^2\delta r$$

On ne calcule pas la constante car on sait qu'elle va s'annuler puisqu'on est au voisinage de l'équilibre. On fait le DL de l'autre terme :

$$\frac{k}{mr^2}\exp(-ar) = \frac{k}{m(r_0 + \delta r)^2}\exp(-a(r_0 + \delta r))$$

$$= \frac{k}{mr_0^2}\Big(1+\frac{\delta r}{r_0}\Big)^{-2} e^{-ar_0}\exp(-a\delta r)$$
$$\underset{\delta r \ll r_0, \frac{1}{a}}{=} \frac{k}{mr_0^2} e^{-ar_0}\Big(1-2\frac{\delta r}{r_0}\Big)(1-a\delta r)$$
$$= \text{cste} + \frac{k}{mr_0^2} e^{-ar_0}\Big(-a-\frac{2}{r_0}\Big)\delta r$$
$$= \text{cste} - \frac{k}{mr_0^2} e^{-ar_0}\Big(a+\frac{2}{r_0}\Big)\delta r$$
$$= \text{cste} - r_0\dot\theta_0^2\Big(a+\frac{2}{r_0}\Big)\delta r$$

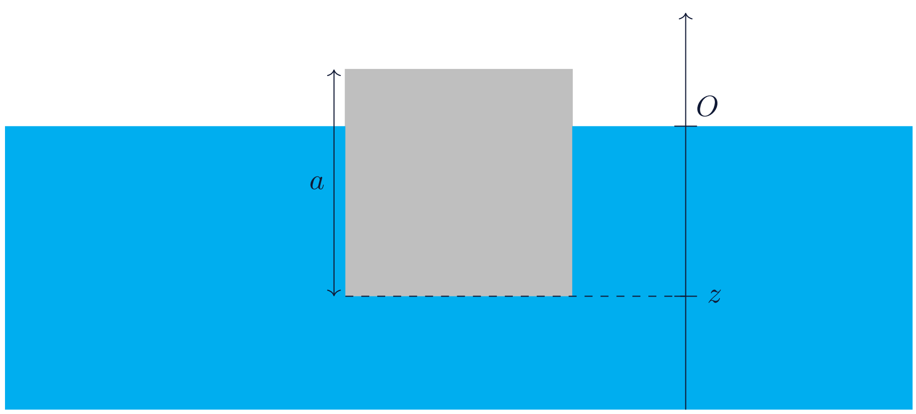
En utilisant la relation qui caractérise l'orbite circulaire. On réinjecte le tout :

$$\delta\ddot r + 3\dot\theta_0^2\delta r = +\dot\theta_0^2(2+ar_0)\delta r$$
$$\delta\ddot r + (1-ar_0)\dot\theta_0^2\delta r = 0$$

Donc l'orbite est stable si et seulement si $r_0 < \frac{1}{a}$.

Exercice 27 : Palet flottant

On repère le palet par la position de sa base, qu'on repère par sa coordonée z, dont on met l'origine à au niveau de la surface de l'eau.



On fait le bilan des forces s'appliquant sur le cube : il y a le poids, qui s'écrit $\vec{P}\cdot\vec{u}_z = -mg$. Il y a les frottements fluides, que l'on va négliger, ce qui revient à supposer que la vitesse n'est pas trop importante. On quantifiera cela plus tard.

Il y a enfin la poussée d'Archimède. On suppose que l'amplitude du mouvement est suffisamment petite pour que le bloc ne soit jamais sous l'eau, ce qui fait qu'une hauteur $-z$ du bloc est sous le niveau de l'eau, ni ne quitte l'eau complètement. La poussée d'Archimède est une force qui s'exerce à l'équilibre. On suppose donc que le mouvement est suffisamment lent pour que tout moment soit un état d'équilibre, ce qui permet d'écrire qu'à tout moment, le système est soumis à une force opposée au poids de fluide déplacé. Donc :

$$\vec{\Pi}_A\cdot\vec{u}_z = \rho_{eau}(-z)\times a^2 g$$

On applique donc le PFD en projection selon $\vec{u}_z$:

$$\rho a^3 \ddot{z} = -\rho a^3 g - z\rho_{eau} a^2 g$$
$$\ddot{z} + \frac{\rho_{eau}}{\rho}\frac{g}{a} z = -g$$

On pose donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_{eau}}{\rho}\frac{g}{a}}$ et $z_{eq} = -a\frac{\rho}{\rho_{eau}}$. On a alors :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = z_{eq}$$

C'est un oscillateur harmonique. Le mouvement est donc sinusoïdal de pulsation ω_0. Le mouvement est de la forme :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{eq}$$

On veut d'abord vérifier l'hypothèse que le bloc ne plonge pas sous l'eau et qu'il ne saute pas au-dessus du niveau de la mer. Il faut pour cela que :

$$|A| + z_{eq} \leqslant 0$$
$$|A| \leqslant -z_{eq} = a\frac{\rho}{\rho_{eau}}$$

et que :

$$-|A| + z_{eq} \geqslant -a$$
$$|A| \leqslant z_{eq} + a = a\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{eau}}\right)$$

Il suffit de calculer A en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = z_0 - z_{eq} \\ -A\omega_0\sin(\varphi) = v_0 \end{cases}$$
$$A^2\cos^2(\varphi) + A^2\sin^2(\varphi) = (z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$
$$A^2 = (z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$
$$|A| = \sqrt{(z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$
$$\sqrt{(z_0 - z_{eq})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \leqslant a\min\left(\frac{\rho}{\rho_{eau}}, \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{eau}}\right)\right)$$

On veut ensuite vérifier l'hypothèse de négligeabilité des frottements. On imagine bien (si vous avez déjà vu une bouée flotter sur l'eau) que le mouvement est relativement lent, donc que les frottements sont linéaires en $\vec{v}$, on utilise donc l'expression de la force de Stokes :

$$\vec{F}_{Stokes} = -6\pi\eta a\vec{v}$$

On applique le PFD avec cette force :

$$\ddot{z} + 6\pi\eta a\dot{z} + \omega_0^2 z = z_{eq}$$

On veut la mettre sous forme canonique, on a donc :

$$6\pi\eta a = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{6\pi\eta a} = \frac{1}{6\pi\eta a}\sqrt{\frac{\rho_{eau}}{\rho}\frac{g}{a}}$$

L'amortissement est négligeable si le facteur de qualité est grand devant 1 :

$$\frac{1}{6\pi\eta a}\sqrt{\frac{\rho_{eau}}{\rho}\frac{g}{a}} \gg 1$$

$$\eta \ll a^{-3/2}\sqrt{g\frac{\rho_{eau}}{\rho}}$$

On veut ensuite vérifier que l'on peut supposer que chaque instant est un instant d'équilibre (pour pouvoir appliquer l'expression de la poussée d'Archimède). On a négligé la viscosité, donc le mouvement de l'eau est dû uniquement à la gravité. On va donc fabriquer un temps typique de retour à l'équilibre. Il est lié à la gravité, donc on utilise g. $[g] = L.T^{-2}$. Il faut donc se débarasser de la longueur. Et une longueur typique du problème est a. On pose donc

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Il faut que le temps de retour à l'équilibre soit très faible devant le temps typique du mouvement :

$$\tau \ll \frac{1}{\omega_0}$$

$$\sqrt{\frac{a}{g}} \ll \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{eau}}\frac{a}{g}}$$

$$\sqrt{\rho_{eau}} \ll \sqrt{\rho}$$

$$\rho_{eau} \ll \rho$$

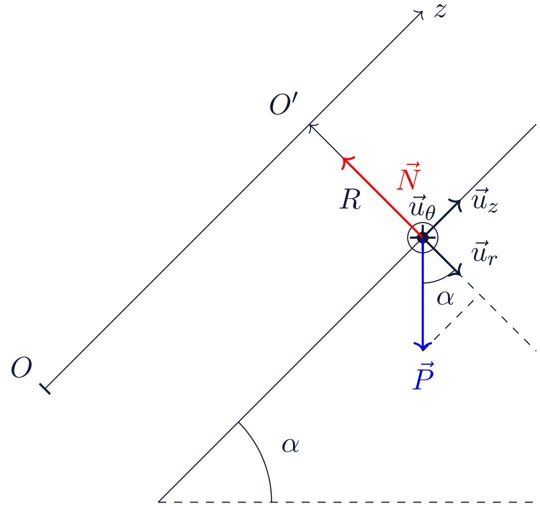
C'est donc nécessairement une mauvaise approximation, tant que le bloc flotte. On peut s'y attendre, car si vous voyez une bouée flotter à la surface de l'eau, elle crée des vagues qui sont visibles et de fréquence la pulsation propre de l'oscillation, l'eau n'est donc pas à l'équilibre, puisqu'elle est sérieusement impactée par le mouvement de la bouée.

Exercice 28 : Grains de sable dans un cylindre

On va corriger la version aidée, ce qui corrigera la version brutale.

1. On a affaire à un cylindre, on choisit donc les cylindriques d'axe l'axe de révolution du cylindre.

2. On va séparer ce qui se passe dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de ce qui se passe selon $\vec{u}_z$.



On va d'abord appliquer le PFD en projection selon $\vec{u}_z$. On fait le bilan des forces s'appliquant sur le point en mouvement.

Il y a la réaction du support, qui est normale à la surface car on néglige les frottements, $\vec{N} = -N\vec{u}_r$.

Il y a également le poids $\vec{P} = -mg\sin(\alpha)\vec{u}_z + (\dots)\vec{u}_r + (\dots)\vec{u}_\theta$. On s'intéressera à ce qui se passe dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ après. Il reste à calculer l'accélération selon $\vec{u}_z$.

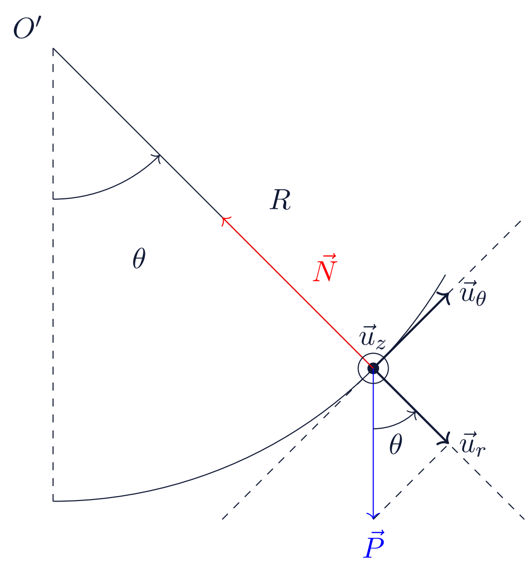
$a_z = \ddot{z}$

On applique le PFD selon $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = -mg\sin(\alpha)$$
$$\ddot{z} = -g\sin(\alpha)$$

C'est exactement l'équation de la chute libre, mais avec un poids de norme $mg\sin(\alpha)$.

On regarde ensuite ce qui se passe dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On voit sur le schéma plus haut que le poids dans le plan en question est de norme $mg\cos(\alpha)$.



On remarque qu'on a exactement affaire à un pendule simple de poids $mg\cos(\alpha)$ et de longueur R. Voir la correction de l'exercice 20 pour les projections et l'accélération.

Le PFD en projection selon $\vec{u}_\theta$ donne alors :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos(\alpha)\sin(\theta)$$

3. Puisque la position initiale est proche de A et la vitesse initiale est nulle (c'est le sens de "on pose", sous-entendu on ne leur a pas donné de vitesse initiale), on peut simplifier l'équations sur θ pour des petites oscillations :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos(\alpha)\theta$$

Pour les détails de la résolution, voir le cours page 11. La solution est donc :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}\cos(\alpha)}$. Pour l'équation selon $\vec{u}_z$, on résout comme pour la chute libre :

$$\ddot{z} = -g\sin(\alpha)$$

On primitive :

$$\dot{z}(t) = -gt\sin(\alpha) + \dot{z}_0$$

La vitesse initiale étant nulle :

$$\dot{z}(t) = -gt\sin(\alpha)$$

On primitive :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin(\alpha) + z_0$$

À $t = 0$, $z = L$, donc $z_0 = L$.

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin(\alpha) + L$$

4. Les particules de sable suivent toutes les équations horaires trouvées à la question précédente, simplement toutes avec θ_0 différent. On va faire l'hypothèse que les particules de sable ne s'entrechoquent pas. C'est une hypothèse très fausse, mais puisque les particules oscillent toutes à la même pulsation, ça ne va pas beaucoup changer le résultat : les chocs ne changeront pas la moyenne de l'oscillation. C'est également une hypothèse nécessaire à faire si on veut pouvoir traiter l'exercice, donc on la fait (c'est une bonne leçon à retenir, les hypothèses permettant de résoudre le problème analytiquement sont toujours à faire dans un exercice).

Grâce au résultat de la question précédente, on sait que chaque grain de sable arrive tout en bas du cylindre en un temps :

$$0 = -\frac{1}{2}g\tau^2\sin(\alpha) + L$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{g\sin(\alpha)}}$$

On veut qu'à l'instant τ, $\theta = 0$ (c'est l'angle du point B) :

$$\cos(\omega_0 \tau) = 0$$

Donc :

$$\omega_0 \tau = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Avec $n \in \mathbb{N}$. Cela se réécrit :

$$L = \frac{1}{2} R \Big(\frac{\pi}{2} + n\pi\Big)^2 \tan(\alpha)$$

Pas mal, non ?

Exercice 29 : L'oscillateur harmonique amorti

Le nombre N d'oscillations visibles est environ le nombre d'oscillations qu'il y a sur le graphique. La fréquence des oscillations est $f = 200\mathrm{Hz}$, et on note T la période. Le nombre d'oscillations sur le graphique est :

$$NT = \Delta t$$

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \Delta t \times f = 500$$

Et le cours nous dit que $Q \approx N = 500$, c'est donc la **réponse 4**.

Problème 2 : ondes sonores dans un cristal monoatomique

1. (i) Dans le modèle microscopique il y a un atome de masse m tous les a, donc la masse par unité de longueur vaut $\frac{m}{a}$.

Dans le modèle macroscopique, la masse de la barre vaut $SL\mu$, donc la masse par unité de longueur vaut $\mu SL/L = \mu S$.

La masse par unité de longueur doit être la même dans les deux modèles, donc :

$$\frac{m}{a} = \mu S$$

(ii) a est la distance entre atomes au repos, donc correspond à la position d'équilibre de l'interaction entre deux atomes. On fait donc le DL de l'énergie potentielle d'interaction :

$$E_p(a+u) = E_p(a) + \frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=a} u + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=a} u^2$$

Puisque a est une position d'équilibre, donc $\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=a} = 0$ et $K = \frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=a} > 0$. Donc la force exercée par l'interaction entre deux atomes vaut $-Ku$. Par principe des actions réciproques, $F = Ku$. C'est une force élastique.

(iii) Le module d'Young est une force par unité de surface, c'est donc une pression. Elle s'exprime donc en Pa. On a fait l'hypothèse que l'allongement était uniforme, donc :

$$L + \delta L = \sum_{i=1}^{N} a + u$$

$$L + \delta L = N(a+u)$$

$$\delta L = Nu$$
$$\frac{\delta L}{L} = \frac{Nu}{Na} = \frac{u}{a}$$

On réinjecte le résultat de la question (ii) dans la relation définissant le module d'Young :

$$\frac{F}{S} = E\frac{\delta L}{L}$$
$$\frac{Ku}{S} = E\frac{u}{a}$$

On remplace S grâce au résultat de la question (i) :

$$\frac{\mu a K}{m} = \frac{E}{a}$$

$$\frac{K}{m} = \frac{E}{\mu a^2}$$

Donc $K = \dfrac{Em}{\mu a^2} = 2.5 \times 10^3 \mathrm{N\,m^{-1}}$. C'est 50 fois plus que la raideur typique d'un ressort en TP, c'est donc très très raide, très dur à allonger, ce qui semble logique, il n'est pas facile d'allonger de l'acier.

Cela donne une pulsation $\sqrt{\dfrac{K}{m}} = 1.7 \times 10^{14} Hz$.

2. (i) On va appliquer le PFD en une dimension. On fait le bilan des forces s'appliquant sur la particule n.

Il y a la force de rappel du ressort $n-1$: $F_{(n-1)/n} = K(a - (a + u_n - u_{n-1})) = -K(u_n - u_{n-1})$

Il y a la force de rappel du ressort $n+1$: $F_{(n+1)/n} = -K(a - (a + u_{n+1} - u_n)) = -K(u_n - u_{n+1})$.

On applique le PFD :

$$m\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$$

(ii) $u_n(t) = u_0 \sin(\omega t - kna)$, donc $\dfrac{d^2 u_n}{dt^2} = -u_0\omega^2 \sin(\omega t - kna)$. Si on réinjecte le tout dans l'équation précédente :

$$-mu_0\omega^2 \sin(\omega t - kna) = -K(u_0 \sin(\omega t - kna) - u_0 \sin(\omega t - k(n+1)a) + u_0 \sin(\omega t - kna) - u_0 \sin(\omega t - k(n-1)a))$$

On utilise la première formule de trigonométrie donnée par l'énoncé :

$$\omega^2 \sin(\omega t - kna) = \frac{K}{m}\Big(2\sin\Big(\frac{k(n+1)a - kna}{2}\Big)\cos\Big(\omega t - k\Big(n + \frac{1}{2}\Big)a\Big) + 2\sin\Big(\frac{k(n-1)a - kna}{2}\Big)\cos\Big(\omega t - k\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\Big)\Big)$$

$$\omega^2 \sin(\omega t - kna) = 2\frac{K}{m}\sin\Big(\frac{ka}{2}\Big)\Big(\cos\Big(\omega t - k\Big(n + \frac{1}{2}\Big)a\Big) - \cos\Big(\omega t - k\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\Big)\Big)$$

Puis on utilise la deuxième formule de trigo donnée par l'énoncé :

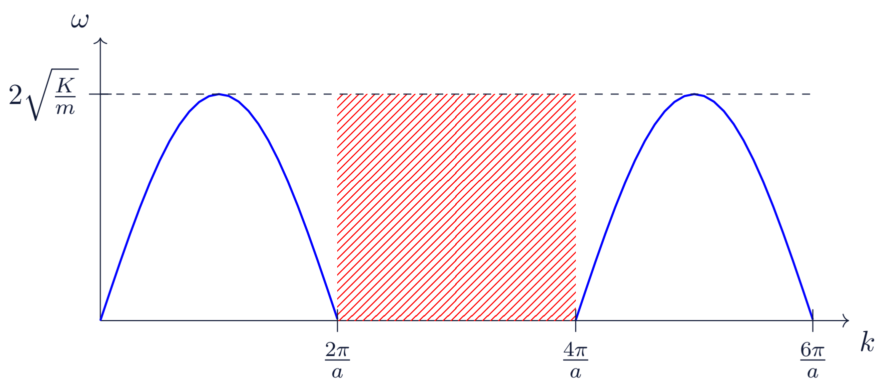
$$\omega^2 \sin(\omega t - kna) = -4\frac{K}{m}\sin(\omega t + kna)\sin\Big(-\frac{ka}{2}\Big)$$

$$\omega^2 = 4\frac{K}{m}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Donc si $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) < 0$ il n'y a pas de solution, et si $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \geqslant 0$, on a :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

(iii)



$k \mapsto \sin\left(\dfrac{ka}{2}\right)$ est $2\pi/a$ périodique, donc le mouvement des atomes est inchangé par $k \mapsto +2p\pi/a$. C'est simplement un effet de l'invariance du problème par translation de a. Les grandes longueurs d'ondes correspondent au petits k. Cela correspond au régime $k \ll 1/a$. On fait alors le DL du sinus au voisinage de 0 :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \underset{ka\ll 1}{=} 2\sqrt{\frac{K}{m}}\frac{ka}{2} = ka\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Cela correspond à un milieu non dispersif : la célérité, $\dfrac{\omega}{k}$ ne dépend pas de la fréquence.

Si $\omega > 2\sqrt{\dfrac{K}{m}}$, il est impossible d'avoir une onde progressive harmonique. Il y a donc de l'atténuation. On dit que l'onde est évanescente.

(iv) Si l'on remplace une masse par $m' \ll m$, comme elle a une très faible inertie comparée aux autres masses, elle oscille beaucoup plus que les autres masses. La masse m' peut osciller à des fréquences supérieures à la fréquence maximale du cristal (puique $\sqrt{K/m'} > \sqrt{K/m}$). Mais ces modes ne peuvent pas se propager sans atténuation dans le reste du cristal (comme on l'a vu à la question précédente).

Imaginons maintenant qu'une onde progressive harmonique de vecteur d'onde k traverse le milieu. Elle excite les atomes à la fréquence $2\sqrt{\dfrac{K}{m}}\sin\left(\dfrac{ka}{2}\right)$. Elle veut exciter la masse m' à la fréquence $2\sqrt{\dfrac{K}{m'}}\sin\left(\dfrac{ka}{2}\right)$ qui est différente. On ne peut donc pas avoir de propagation harmonique. Il y a donc réflexion et diffusion (atténuation).

(v) Pour qu'une fréquence soit admissible, il faut qu'une onde progressive harmonique à cette fréquence puisse se propager, donc sans atténuation. Dans un cristal avec deux masses m et m' très différentes, qui ont deux fréquences propres très différentes. Ce sont des oscillateurs couplés, donc il y a deux modes fondamentaux :

— le mode symétrique, les masses m et m' sont en phase, les ressorts sont donc peu sollicités. Il est donc possible d'exciter ce mode à très basse fréquence, puisque c'est un mode où l'inertie joue peu, où les masses ont le temps de se déplacer ensemble de manière quasi-statique.

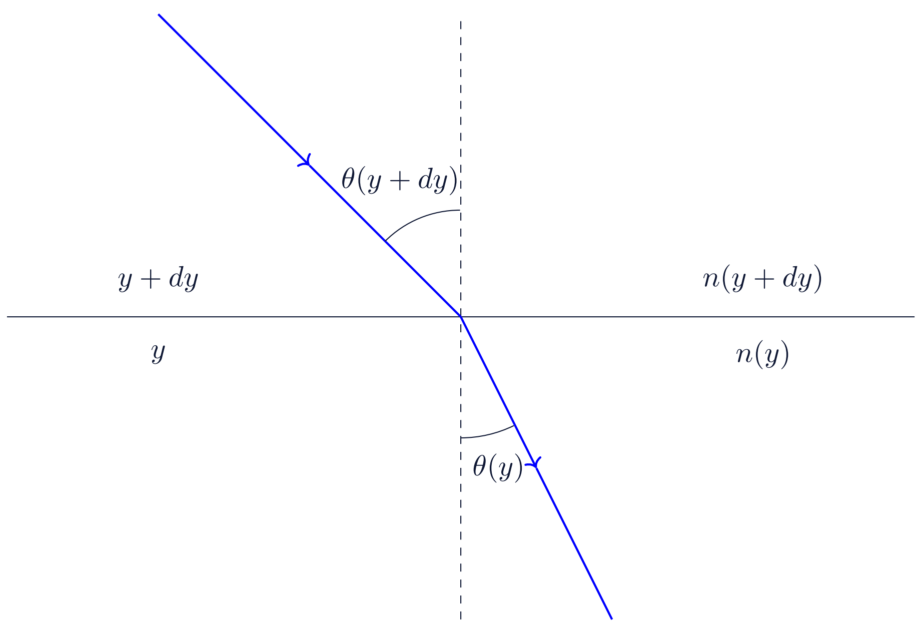
— Le mode antisymétrique, les masses m et m' sont en opposition de phase, les ressorts sont donc très sollicités. Il faut donc une grande accélération pour aller avec ces grandes forces : ce mode correspond donc à des hautes fréquences.

Si les masses m et m' sont très différentes, ces deux modes sont très éloignés. Donc entre ces deux modes, on peut trouver des fréquences n'étant pas assez faibles pour faire bouger les masses en phase, et pas assez élevées pour faire bouger ces masses en opposition de phase. Les différentes masses se gênent donc dans leur mouvement (on n'est pas dans une situation où le mouvement de l'une aide le mouvement de l'autre comme dans les modes symétriques et antisymétriques), donc il y a de l'atténuation. Cela fait qu'il y a une bande de fréquences interdite.

3 L'oscillateur harmonique partout ailleurs

Exercice 30 : Encore de l'optique

1.



On applique la loi de Snell-Descartes :

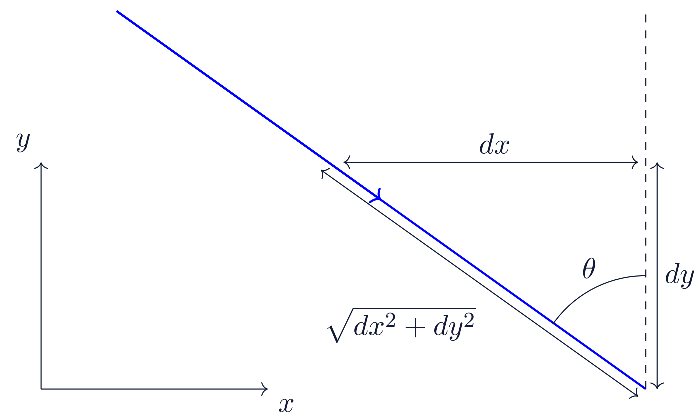
$$n(y+dy)\sin(\theta(y+dy)) = n(y)\sin(\theta(y))$$

$$\frac{d}{dy}(n\sin(\theta)) = 0$$

$$n(y)\sin(\theta(y)) = n_0 \sin(\theta_0) = n_0$$

Car l'incidence est normale, donc $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. On fait un schéma :



On a donc $\sin(\theta) = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

$$n(y) \times \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}} = n_0$$

$$\frac{n(y)}{n_0} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_0}\right)^2 - 1$$

3. On a donc :

$$y'(x)^2 - \left(1 - \frac{k}{n_0}y(x)\right)^2 = -1$$

On reconnaît, à un signe près, le théorème de l'énergie mécanique pour un ressort. On dérive donc :

$$2y'y'' - 2\left(-\frac{k}{n_0}y'\right)\left(1-\frac{k}{n_0}y\right) = 0$$

$$y'' + \frac{k}{n_0}\left(1-\frac{k}{n_0}y\right) = 0$$

$$y'' - \left(\frac{k}{n_0}\right)^2 y = -\frac{k}{n_0}$$

On pose $\alpha = \frac{k}{n_0}$. On résout l'équation différentielle homogène associée :

$$y_h'' - \alpha^2 y_h = 0$$

$$y_h(x) = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x)$$

Où on a défini $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. On cherche ensuite la solution particulière, le second membre étant constant, elle est constante.

$$y_p = \frac{1}{\alpha}$$

On a :

$$y(x) = y_h(x) + y_p = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}$$

On a $y(0) = 0$, et puisque l'incidence est horizontale, $y'(0) = 0$.

$$\begin{cases} A + \dfrac{1}{\alpha} &= 0 \\ B\alpha &= 0 \end{cases}$$

Donc :

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - \cosh(\alpha x))$$

Dans le sujet original, ils n'avaient pas pensé à dériver, ce qui fait qu'ils incitaient à faire un changement de variables $\theta = \dfrac{n_0 - ky}{n_0}$, et donnaient la primitive de $\sec(\theta)$, avec qui vaut $\ln(\sec(\theta) + \tan(\theta))$, qu'il fallait ensuite inverser pour trouver y. Autrement dit, dériver quelque chose qui ressemblait à de l'énergie nous a épargné beaucoup de souffrances.

4. On cherche la solution à l'équation :

$$y(x_0) = -y_0$$

$$\cosh(\alpha x_0) = 1 + \alpha y_0$$

$$x_0 = \frac{1}{\alpha}\text{argcosh}(1 + \alpha y_0) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\alpha y_0 + \sqrt{\alpha^2 y_0^2 - 1}\right)$$

Exercice 31 : Principe d'un pH-mètre

1. On est à haute température si $\dfrac{ZeV_0}{k_B T} \ll 1$, i.e. si $T \gg \dfrac{ZeV_0}{k_B}$. On regarde le DL de $\sinh$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{t \ll 1}{=} \frac{1 + t - (1 - t)}{2} = t$$

Donc, à haute température, l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \underset{\frac{ZeV_0}{k_B T} \ll 1}{=} \frac{Zen_0}{\varepsilon_0}\frac{ZeV(x)}{k_B T} = \frac{Z^2 e^2 n_0}{k_B T \varepsilon_0} V$$

2. On pose $d = \sqrt{\dfrac{k_B T \varepsilon_0}{Z^2 e^2 n_0}}$. La solution est de la forme :

$$V(x) = Ae^{-x/d} + Be^{x/d}$$

On obtient $\vec{E} = \left(\frac{Ae^{-x/d} - Be^{x/d}}{d}\right)\vec{u}_x$. Si $B \neq 0$, l'énergie électrostatique volumique diverge, ce qui est absurde. Donc $B = 0$. On a la condition initiale $V(0) = V_0$, ce qui donne la solution :

$$V(x) = V_0 e^{-x/d}$$

3. Le milieu peut être considéré comme infini si sa taille typique L est très grande devant d. Pour de l'acide chlorhydrique à $C = 0.1\mathrm{mol\,L^{-1}}$, on a une solution de H_3O^+ et Cl^-, donc $Z = 1$, et $n_0 = \frac{N}{V} = \mathcal{N}_A \frac{N/\mathcal{N}_A}{V} = \mathcal{N}_A \frac{n}{V} = C\mathcal{N}_A = 6 \times 10^{25}\mathrm{m}^{-3}$ (ne pas oublier de convertir les moles par litre en moles par mètres cubes), et on est à température ambiante, c'est-à-dire $T = 300\mathrm{K}$, ce qui donne une distance typique de variation du potentiel :

$$d = 1.5 \times 10^{-10}\mathrm{m}$$

Si la solution fait 100 mL, la distance typique dans cette solution est $L = V^{1/3} = 46\mathrm{cm}$. On a bien $L \gg d$, l'approximation du milieu infini est tout à fait valable. Et on est tellement large qu'on peut dire que pour des solutions usuelles de TP de chimie, cette approximation est toujours valable.

Exercice 32 : De la thermodynamique ?! L'expérience de Rüchardt

1. La section du piston est la même à l'intérieur et à l'extérieur, P_0 étant la pression d'équilibre, en appliquant le principe fondamental de la statique au piston :

$$P_0 S - P_{atm} S = 0$$

$$P_0 = P_{atm}$$

2. On est donc dans les hypothèses de la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$$

$$P = P_0 \Big(\frac{V_0}{V}\Big)^\gamma$$

En $x = 0$, $V = V_0$. Donc $V(x) = V_0 + Sx$. Donc

$$P = P_0 \Big(1 + \frac{Sx}{V_0}\Big)^{-\gamma}$$

On va applique le PFD au piston, en projection selon l'axe (Ox). On fait le bilan des forces s'appliquant sur le piston. Il y a le poids, mais peu importe son orientation, il ne rajoutera qu'un terme constant dans l'équation, donc ne changera pas la pulsation. On peut donc supposer que le poids est normal à l'axe (Ox). Il y a la réaction du support, mais comme on suppose qu'il n'y a pas de frottements, elle est normale à l'axe (Ox). Les deux seules forces qui s'appliquent sont la résultante des forces pressantes à gauche, de l'intérieur de l'enceinte, et à droite, donc de l'atmosphère. Cela donne l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} = PS - P_0 S = P_0 S \Big(\Big(1 + \frac{Sx}{V_0}\Big)^{-\gamma} - 1\Big)$$

Le piston n'a été perturbé que "légèrement", on peut donc imaginer que $x \ll \frac{V_0}{S}$. Cela donne l'équation différentielle :

$$\ddot{x} \underset{Sx/V_0 \ll 1}{=} \frac{P_0 S}{m}\Big(1 - \frac{\gamma S x}{V_0} - 1\Big) = -\frac{\gamma P_0 S^2}{m V_0} x$$

On a donc un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0 S^2}{mV_0}}$. La mesure de la pulsation des petites oscillations permet de remonter à γ.

Exercice 33 : De l'électrocinétique ? ! L'autre exercice sur l'oscillateur harmonique amorti

On a le jeu d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q_1}{dt^2} - \dfrac{d^2q_2}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{1}{LC}q_1 = \dfrac{E}{L} \\ \dfrac{d^2q_2}{dt^2} - \dfrac{d^2q_1}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq_2}{dt} + \dfrac{1}{LC}q_2 = 0 \end{cases}$$

On remarque que le couplage entre q_1 et q_2 est symétrique. Il faut donc faire la somme et la différence. On pose $S = q_1 + q_2$ et $D = q_1 - q_2$. On fait la somme des deux équations différentielles :

$$\frac{R}{L}\dot{S} + \frac{1}{LC}S = \frac{E}{L}$$
$$\dot{S} + \frac{1}{RC}S = \frac{E}{R}$$

On pose $\tau = RC$ et $S_\infty = CE$.

$$\dot{S} + \frac{S}{\tau} = \frac{S_\infty}{\tau}$$

On résout l'équation homogène associée $\dot{S} + \frac{S}{\tau} = 0$. $S_h(t) = Ae^{-t/\tau}$. On cherche ensuite une solution particulière, le second membre est constant, donc la solution particulière doit être constante : $S_p = S_\infty$. On a donc :

$$S(t) = Ae^{-t/\tau} + S_\infty$$

$S(t=0) = A + S_\infty = 2 \times \frac{CE}{2} = S_\infty$, $A = 0$. Donc $S(t) = CE$.

On fait ensuite la différence des deux équations différentielles :

$$2\ddot{D} + \frac{R}{L}\dot{D} + \frac{1}{LC}D = \frac{E}{L}$$
$$\ddot{D} + \frac{R}{2L}\dot{D} + \frac{1}{2LC}D = \frac{E}{2L}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$, donc on pose $D_\infty = CE$. On cherche ensuite à mettre cette équation sous forme canonique :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{2L}$$
$$Q = \frac{2L}{R\sqrt{LC}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On a donc :

$$\ddot{D} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{D} + \omega_0^2 D = \omega_0^2 D_\infty$$

On doit savoir dans quel régime on se place. On calcule donc le facteur de qualité : $Q = 0.7 > 1/2$. On est donc en régime pseudo-périodique. On pose $\tau' = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. On résout l'équation homogène associée :

$$\ddot{D} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{D} + \omega_0^2 D = 0$$

On a : $D_h(t) = e^{-t/\tau'}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$. Par ailleurs, on cherche une solution particulière, le second membre est constant, on cherche donc la solution constante, on trouve $D_p = D_\infty$. Donc on a :

$$D(t) = D_h(t) + D_p = e^{-t/\tau'}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + D_\infty$$

On trouve les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} D(t=0) = & A + D_\infty = & 0 \\ \dot{D}(t=0) = & -\dfrac{A}{\tau'} + B\Omega = & \dfrac{E}{R} \end{cases}$$

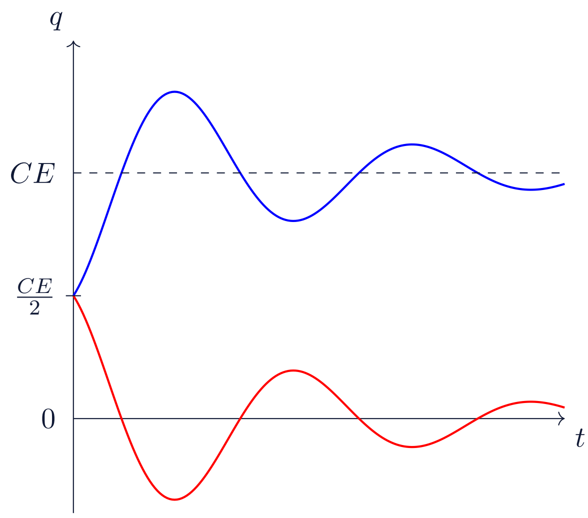
$$\begin{cases} A = & -D_\infty = & -CE \\ B = & \dfrac{1}{\Omega}\left(\dfrac{E}{R} - \dfrac{D\infty}{\tau'}\right) = & \dfrac{1}{\Omega}\left(\dfrac{E}{R} - \dfrac{CE}{\tau'}\right) \end{cases}$$

La solution est donc :

$$D(t) = CE + e^{-t/\tau'}\Big(-CE\cos(\Omega t)) + \frac{1}{\Omega}\left(\frac{E}{R} - \frac{CE}{\tau'}\right)\sin(\Omega t)\Big)\Big)$$

On a finalement :

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{S(t)+D(t)}{2} = & CE + \dfrac{1}{2}e^{-t/\tau'}\Big(-CE\cos(\Omega t)) + \dfrac{1}{\Omega}\left(\dfrac{E}{R} - \dfrac{CE}{\tau'}\right)\sin(\Omega t)\Big)\Big) \\ q_2(t) = \dfrac{S(t)-D(t)}{2} = & -\dfrac{1}{2}e^{-t/\tau'}\Big(-CE\cos(\Omega t)) + \dfrac{1}{\Omega}\left(\dfrac{E}{R} - \dfrac{CE}{\tau'}\right)\sin(\Omega t)\Big)\Big) \end{cases}$$



q_1 en bleu, q_2

Je pense que cela vous démontre bien que ça n'est pas d'un grand intérêt. Les aspects qualitatifs sont tout de même importants.

Exercice 34 : De la mécanique quantique ? Le puits de potentiel infini

1. En dehors de $[0, L]$, l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \infty \times \varphi(x) = E\varphi(x)$$

La seule façon que $+\infty \times \varphi(x)$ ne diverge pas est que $\varphi(x) = 0$. C'est comme en mécanique classique, il est impossible de passer une barrière de potentiel infinie. Pour l'annulation à droite et à gauche, il faut la continuité : $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ peut éventuellement diverger en 0 et en L. Ce qui fait que $\frac{d\varphi}{dx}$ peut éventuellement être discontinue en 0 et en L, ce qui fait que φ est dérivable à gauche et à droite en 0 et en L, donc continue.

2. On a donc, pour $x \in [0, L]$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi(x)$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$$

Donc si $E < 0$, on a avec $k = \dfrac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$,

$$\varphi(x) = A\cosh(kx) + B\sinh(kx)$$

Si $E = 0$,

$$\varphi(x) = Ax + B$$

Si $E > 0$, on a, avec $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$,

$$\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

3. On suppose que $E < 0$. On a donc :

$$\varphi(0) = A = 0$$
$$\varphi(L) = A\cosh(kL) + B\sinh(kL) = B\sinh(kl) = 0$$

Donc $B = 0$ car $\sinh$ ne s'annule qu'en 0. Finalement, $\varphi(x) = 0$, ce qui est impossible d'après l'énoncé. On suppose que $E = 0$. On a donc :

$$\varphi(0) = B = 0$$
$$\varphi(L) = AL + B = AL = 0$$

Donc $A = 0$, donc $\varphi(x) = 0$, ce qui est à nouveau impossible. Donc $E > 0$.

4. On a donc

$$\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Et $\varphi(0) = A = 0$. Donc $\varphi(x) = B\sin(kx)$, donc nécessairement, $B \neq 0$. Et :

$$\varphi(L) = B\sin(kL) = 0$$
$$\sin(kL) = 0$$
$$kL = n\pi$$

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}L = n\pi$$

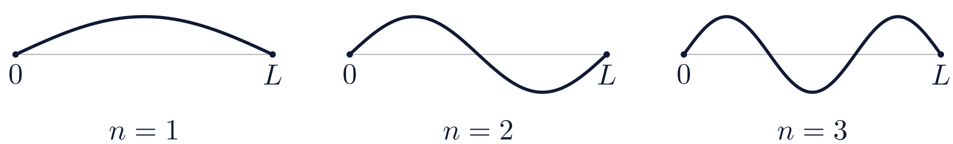
$$\frac{2mEL^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2$$

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

5. La question 1 nous dit qu’on a une onde aux extrémités fixes. L’énoncé nous dit qu’on cherche une solution stationnaire, on a donc une onde stationnaire. Elle est fixée sur une longueur L. Sa longueur d’onde λ_n vérifie donc

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



Donc la quantité de mouvement p_n vaut :

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{hn}{2L}$$

Donc l’énergie E vaut :

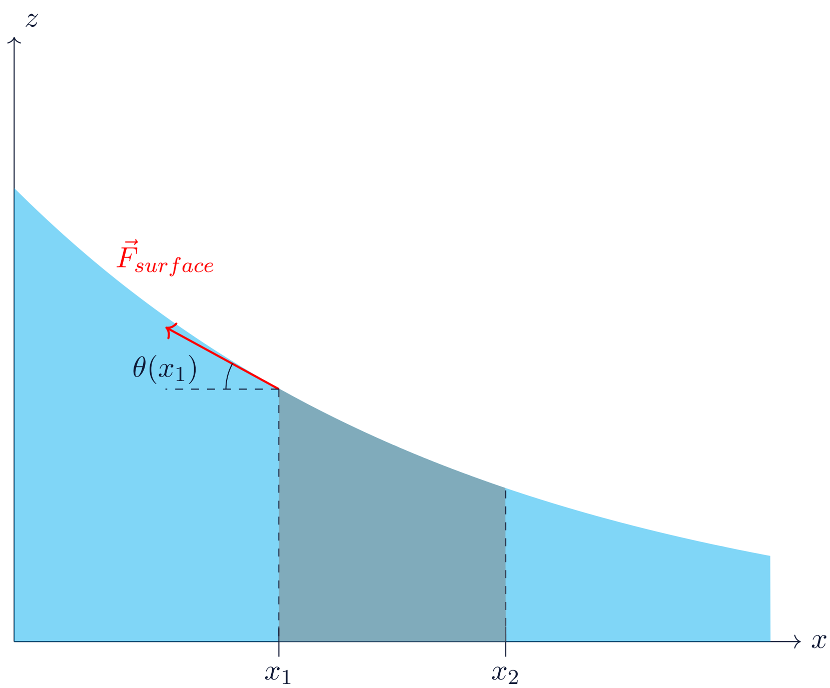
$$E = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2n^2}{8mL^2} = \frac{\hbar^2(2\pi)^2n^2}{8mL^2} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}$$

Attention, la formule $E = \frac{hc}{\lambda}$ n’est vraie que pour des particules ultra-relativistes ($pc \gg mc^2$). Ici la "vitesse" de la particule n’est pas c.

Problème 3 : Eau et objets

3.1 Une plaque positionnée verticalement

1. Par principe fondamental de la statique, les forces de pression sont l’opposée des forces de tension de surface. Il suffit de calculer la résultante des forces de tension de surface.



La composante horizontale de la force linéique appliquée sur le bloc d'eau à gauche vaut :

$$f_1 = -\gamma \frac{L}{L} \cos(\theta(x_1)) = -\gamma \cos(\theta(x_1))$$

Donc la composante horizontale de la force linéique à droite vaut donc :

$$f_2 = \gamma \cos(\theta(x_2))$$

Donc :

$$-f_x = f_2 + f_1 = \gamma(\cos(\theta(x_2)) - \cos(\theta(x_1)))$$

2. On a donc, si on fixe x_1 et on prend x quelconque :

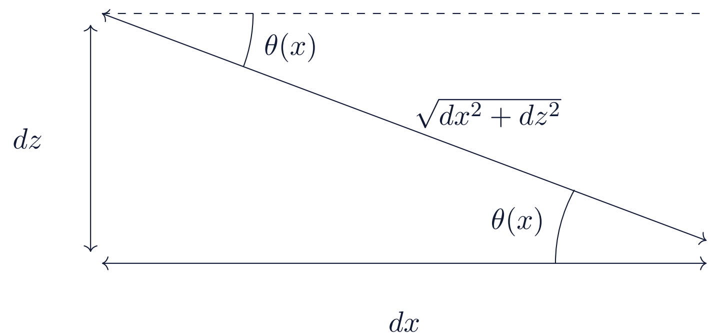
$$-\frac{1}{2}\rho g(z^2 - z_1^2) = \gamma(\cos(\theta(x)) - \cos(\theta(x_1)))$$

$$\frac{1}{2}\frac{\rho g}{\gamma} z^2 + \cos(\theta(x)) = \text{constante}$$

On pose donc $l = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$, et on a donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \cos(\theta(x)) = \text{constante}$$

3. Il faut exprimer $\cos(\theta(x))$ en fonction de z et de x :



On a donc $\cos(\theta(x)) = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+z'(x)^2}}$. L'hypothèse $|z'(x)| \ll 1$ donne donc :

$$\cos(\theta(x)) = (1+z'(x)^2)^{-1/2} \underset{|z'(x)|\ll 1}{=} 1 - \frac{1}{2}z'(x)^2$$

L'équation de la question précédente devient alors :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z(x)}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}z'(x)^2 = \text{constante}$$

On reconnaît l'énergie mécanique d'un ressort, à un signe près. On pense donc à dériver :

$$z''(x) - \frac{z}{l^2} = 0$$

La solution générale est de la forme :

$$z(x) = Ae^{x/l} + Be^{-x/l}$$

$A = 0$ pour éviter la divergence. On a comme condition initiale θ_0, que l'on peut relier à $z'(0)$. Reprenons le schéma fait plus haut : on lit $\tan(\theta) = \dfrac{dz}{dx} = z'(x)$. Donc :

$$z'(0) = -\frac{B}{l} = \tan(\theta_0)$$

$$z(x) = -l\tan(\theta_0)e^{-x/l}$$

3.2 Interaction entre deux tiges

1. On a toujours :

$$z'' - \frac{z}{l^2} = 0$$

Puisque le problème possède une symétrie (parité par rapport à l'axe z), on va choisir d'écrire la solution de la forme :

$$z(x) = A\cosh\left(\frac{x}{l}\right) + B\sinh\left(\frac{x}{l}\right)$$

Par symétrie, $B = 0$ (en effet, $\cosh$ est paire et $\sinh$ est impaire, pour que la solution soit paire il faut donc qu'il n'y ait pas de terme en $\sinh$). Ensuite, on regarde ce qui se passe en x_a :

$$z(x_a) = A\cosh\left(\frac{x_a}{l}\right) = z_a$$

$$A = \frac{z_a}{\cosh\left(\frac{x_a}{l}\right)}$$

Donc :

$$z(x) = z_a \frac{\cosh\left(\frac{x}{l}\right)}{\cosh\left(\frac{x_a}{l}\right)}$$

En particulier, en $x = 0$:

$$z_0 = z(x = 0) = \frac{z_a}{\cosh\left(\frac{x_a}{l}\right)}$$